

BEOBACHTUNGEN ZUR LEHRE VON DER UNENDLICHKEIT GOTTES BEI BERNARD BOLZANO¹

Christian Tapp

Der Beitrag geht der Frage nach, ob zwischen den verschiedenen Kontexten, in denen Bernard Bolzano von »Unendlichem« spricht (mathematisch-quantitativen und metaphysisch-qualitativen), begriffliche Zusammenhänge bestehen. Unter dieser Leitfrage wird die Lehre von der Unendlichkeit Gottes in Bolzanos Hauptwerken untersucht. Dabei zeigt sich, dass Bolzano seine sehr klare Konzeption quantitativer Unendlichkeit auch in philosophischen und theologischen Kontexten erfolgreich anwendet. Man könnte daher in Anlehnung an Äußerungen Bolzanos in PU §11 auf eine reduktionistische These verfallen, nach der man Gott nur deshalb »unendlich« nennt, weil quantitative Unendlichkeit ein wichtiger begrifflicher Bestandteil der Gottesegenschaften ist. Alternativ liegt die Vermutung nahe, dass Bolzano im Hintergrund einen allgemeineren, philosophischen Unendlichkeitsbegriff mitführt. Als aussichtsreichster Kandidat dafür stellt sich die (fast trivial wirkende) Definition von Unendlichkeit als »was kein Ende hat« heraus. Sie muß nach Bolzano allerdings um die Angabe einer Hinsicht ergänzt werden.

1. Einleitung

Das Thema »Unendlichkeit« berührt alle drei Bereiche, in denen Bernard Bolzano (1781–1848) besonders ausgewiesen war: Mathematik, Philosophie und Theologie. Dies macht, zusammen mit seinem Hang, begrifflich äußerst sauber zu arbeiten und vorschnelle Identifizierungen zu vermeiden, Bolzanos Überlegungen zur Unendlichkeit Gottes zu einem sehr lohnenswerten Untersuchungsgegenstand.

¹ Ich bin Edgar Morscher (Salzburg) für zahlreiche wertvolle Anregungen zu diesem Aufsatz dankbar. Ungenauigkeiten gehen hingegen auf mein eigenes Konto.

Bolzano verwendet den Ausdruck »unendlich« und seine Derivate in zwei *prima facie* verschiedenen Zusammenhängen: für Quantitäten (zum Beispiel unendliche Mengen von Dingen, unendlich viele Zahlen, unendlich hohe Grade von Kraft usw.) und für metaphysische Qualitäten wie Eigenschaften Gottes oder unendlicher Geister. Er unterscheidet diese Verwendungsweisen allerdings nicht terminologisch, sondern spricht immer einfach von »unendlich« (im quantitativen Fall spricht er gelegentlich allerdings genauer von »unendlich vielen«). Ist dies ein Indiz dafür, dass Bolzano Zusammenhänge zwischen mathematischer und theologisch-metaphysischer Unendlichkeitsrede sieht? Worin könnten solche Zusammenhänge bestehen?

Dieser Aufsatz verfolgt also eine systematische Fragestellung. Er bemüht sich, historisch weitgehend adäquat zu sein. Im Zweifelsfall wird aber der Interpretierbarkeit und damit der Anschlussfähigkeit an heutige mathematische, philosophische und theologische Begrifflichkeit der Vorrang eingeräumt. Der Aufsatz ist daher nur bedingt ein historischer, auch wenn er sich mit einem historischen Autor beschäftigt.

Im Folgenden analysiere ich unter dieser Leitfrage Bolzanos Verwendung des Ausdrucks »unendlich« in ausgewählten Passagen seiner Hauptwerke: der *Wissenschaftslehre* (WL), der *Religionswissenschaft* (RW) und der *Paradoxien des Unendlichen* (PU).

2. Mathematik

Bolzano hat einen sehr klaren Begriff quantitativer Unendlichkeit.² Er war in der Mathematikgeschichte wohl der Erste, der eine charakteristische Eigenschaft unendlicher Mengen entdeckt hat, die heute in der Mathematik das Standard-Definiens des Unendlichkeitsbegriffs bildet: dass eine Menge ein-eindeutig auf eine echte Teilmenge von sich selbst abbildbar ist.³ Bolzano machte dieses Charak-

² Zum Unendlichkeitsbegriff bei Bolzano vgl. auch (Krickel 1995, bes. 249–256).

³ Vgl. PU §28.

teristikum allerdings nicht zur Definition.⁴ Er definierte die Unendlichkeit von Mengen vielmehr mittels der Einbettbarkeit der natürlichen Zahlen – wie es nach ihm durch Richard Dedekind zu dem zweiten Standard-Unendlichkeitsbegriff geworden ist.⁵ Beide Eigenschaften sind mengentheoretisch äquivalent. Bolzanos quantitative Unendlichkeitsdefinition ist also vollkommen präzise und korrekt – mit einer kleinen Ausnahme. Sie hat mit seinem Größenbegriff zu tun.

In §87 der WL entwirft Bolzano eine detaillierte Theorie endlicher und unendlicher Größen. Eine Größe ist für Bolzano ein Element einer linear geordneten Menge:

$$x \text{ Größe} :\Leftrightarrow \exists(y, <) (x \in y \wedge \forall u, v \in y (u < v \vee u = v \vee v < u)).^6$$

Vielheiten (diesen Ausdruck interpretiere ich als Mengen im modernen Sinne – Bolzanos Verwendung des Ausdrucks »Menge« weicht davon ab), können nach Bolzano als Größen angesehen werden, indem man zwei Dinge außer Acht lässt: alle Eigenschaften, die sich beim Austausch der Elemente gegen andere verändern würden, sowie die Relationen zwischen den Elementen. Dies ähnelt Cantors Definition von Kardinalzahlen. In moderner mathematischer Terminologie sind Kardinalzahlen die Äquivalenzklassen der Äquivalenz-

⁴ Äquivalenz zu einer echten Teilmenge wurde erst von Cantor und Dedekind als Definition des Unendlichen verwendet, siehe etwa (Dedekind 1888, Anm. zu Nr. 64).

⁵ Vgl. (Dedekind 1888, bes. Nr. 71–73). Darin wird der Begriff einer „einfach unendlichen“ Menge so definiert, dass es sich um das Bild der Menge der natürlichen Zahlen unter einer injektiven Abbildung handelt. Anschließend wird bewiesen, dass jede im ersten Sinne unendliche Menge eine »einfach unendliche« Teilmenge besitzt. Da »einfach unendliche« Mengen auch unendlich im ersten Sinne sind, ist damit letztlich gezeigt, dass eine Menge genau dann im ersten Sinne unendlich ist, wenn sie es im zweiten Sinne ist, d. h. wenn sie eine »einfach unendliche« Teilmenge besitzt.

⁶ Dies ist eine ungefähre Näherung an Bolzanos Sicht, derzufolge y keine geordnete Menge, sondern eine Vielheit ist. Für die hier betrachteten Vielheiten aber gilt: »entweder dass sie einander gleichkommen, oder dass die Eine derselben einen der anderen gleichen Theil in sich faßt« (WL I 409). Man könnte es für Bolzano angemessener halten, seine Teil-/Ganzes-Rede mereologisch und nicht mengentheoretisch zu interpretieren. Solange sich daraus keine sachlichen Differenzen ergeben, halte ich aber aus Einfachheitsgründen an der mengentheoretischen Lesart fest.

relation bijektiver Abbildbarkeit: Zwei Mengen haben genau dann dieselbe Kardinalzahl, wenn sie eineindeutig elementweise aufeinander abgebildet werden können. In Cantors eigenen Worten sind Kardinalzahlen das, was wir aus geordneten Mengen erhalten, wenn wir »von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente [...] und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahier[en]«, die Elemente der Mengen also als Einsen betrachten und ihre Anordnung unberücksichtigt lassen.⁷

Bolzanos Theorie von Vielheiten-als-Größen und Cantors Theorie der Kardinalzahlen sind jedoch nicht identisch, da bei Bolzano Einbettung und Teilmengenrelation auf den Vielheiten die Ordnungsrelation auf den entsprechenden Größen induzieren soll.⁸ Das heißt Folgendes: Will man nach Bolzano zwei unendliche Mengen A und B größenmäßig vergleichen, so hat man die Elemente der Menge A auf Elemente der Menge B abzubilden. Wenn dann bei B noch Elemente übrig bleiben, die durch Bilder der Elemente von A nicht erreicht werden, heiße B größer. Dieses intuitiv eingängige Konzept hat den entscheidenden Nachteil, dass das Ergebnis dieses Größenvergleichs von der Wahl der einbettenden Abbildung abhängt. So könnte man etwa die Menge der geraden natürlichen Zahlen auf folgende drei verschiedene Weisen in die Menge der natürlichen Zahlen einbetten:

Gerade natürliche Zahlen → Alle natürlichen Zahlen

- (1) $n \rightarrow n/2$
- (2) $n \rightarrow n$
- (3) $n > 0 \rightarrow n/2 - 1$

Im ersten Fall schickt man jede gerade Zahl auf ihre Hälfte und erreicht so alle natürlichen Zahlen. Man hätte nach Bolzanos Definition also gleich viele natürliche wie gerade natürliche Zahlen. Im zweiten

⁷ Vgl. (Cantor 1887/8, 387), (Cantor 1895/7, 282).

⁸ »Dass die Eine derselben [d.i. von zwei Vielheiten derselben Art, C.T.] einen der andern gleichen Theil in sich faßt [...] wird seyn, wenn wir, nachdem alle Einheiten, aus welchen die Eine dieser Vielheiten besteht, mit Einheiten der andern ausgetauscht worden sind, bei dieser letztern noch Einheiten antreffen« (WL I 409f.).

Fall würde man nur die geraden natürlichen Zahlen erhalten und es blieben alle ungeraden natürlichen Zahlen übrig. Man käme also darauf, dass es mehr natürliche Zahlen als gerade natürliche Zahlen gäbe. Und im dritten Fall schließlich würde man alle natürlichen Zahlen erreichen, hätte aber in der Menge der geraden Zahlen noch die Null übrig. Man käme also darauf, dass es mehr gerade Zahlen als natürliche Zahlen gibt. Bolzano hat diese Ambiguität anscheinend nicht bemerkt. Sie scheint mir aber auch das einzige ernstzunehmende systematische Problem in seiner mathematischen Auseinandersetzung mit dem Unendlichen zu sein.

Bolzano verwendet den Ausdruck »Menge« spezieller als den Ausdruck »Vielheit«. Mengen im Bolzanoschen Sinne sind Vielheiten von Objekten einer bestimmten Art. So definiert er, eine Menge sei endlich, wenn sie irgendwo in der Reihe auftaucht, die mit einer Menge von zwei Elementen einer Art A beginnt und deren nächstes Element man erhält, in dem man zum vorausgehenden ein weiteres Objekt der Art A hinzufügt. – Eine klassische induktive Definition, – die allerdings aus terminologischen Gründen mit 2 beginnt. Und eine Menge von Elementen der Art A heißt unendlich, wenn jede endliche Menge von Elementen der Art A Teil von ihr ist, bzw. genauer: einem Teil von ihr gleichkommt. Dies läuft systematisch gesehen auf die schon erwähnte Einbettung der natürlichen Zahlen in die betreffende Menge hinaus.

Zahlen definiert Bolzano übrigens als die Elemente, die in dieser Sequenz endlicher Mengen von Elementen vom Typ A vorkommen. Wie nahezu all seine Vorgänger baut er damit in den Begriff der Zahl schon ihre Endlichkeit ein. Cantor war tatsächlich der erste, der diesen Bann brechen konnte.⁹

Ein wichtiger Grund für die lange Verhinderung einer fruchtbaren mathematischen Auseinandersetzung mit unendlichen Quantitäten war die Überzeugung, dass der Unendlichkeitbegriff selbst paradox oder gar widersprüchlich war. Diese Überzeugung teilte Bolzano nicht. Im Gegenteil: Sein wohl bekanntestes Werk, die *Paradoxien des Unendlichen* (PU, geschrieben 1847 und 1850 posthum veröffentlicht) verfolgen gerade das Ziel, alle verfügbaren Argumente für diese angebliche Paradoxikalität zu widerlegen. Dieses Anliegen hat später auch Cantor verfolgt.

Bolzano hatte auch schon eine außergewöhnlich klare Vorstellung der topologischen Struktur der reellen Zahlengeraden, obwohl eine präzise Definition des Begriffs der reellen Zahl erst viele Jahrzehnte nach ihm entwickelt wurde. Das werden wir gleich noch am Beispiel einer stetigen Bewegung sehen.

3. Philosophie

Sein klarer quantitativer Unendlichkeitsbegriff erlaubt es Bolzano, auch außerhalb mathematischer Kontexte präzise über quantitative Unendlichkeit zu sprechen. So zum Beispiel, wenn er in §11–12 von RW I zeigt, dass es unendlich viele Wahrheiten *an sich* gibt, also unendlich viele wahre Sätze unabhängig davon, ob sie von irgendeiner denkenden Entität gedacht werden. Dazu beweist er zuerst, dass es überhaupt Wahrheiten *an sich* gibt (der Kern des Arguments ist, dass »nichts ist wahr« ein Selbstwiderspruch ist).¹⁰ Anschließend beweist er, dass es unendlich viele Wahrheiten *an sich* geben muss. Sein Be-

¹⁰ Das Argument geht etwas genauer wie folgt: Wenn alle Sätze falsch wären, so wäre zumindest dieser Satz »alle Sätze sind falsch« wahr, also wäre er ein Gegenbeispiel gegen das, was er behauptet. Es sind also nicht alle Sätze falsch, sondern es gibt mindestens einen wahren Satz. – In WL I §31 findet sich außer diesem noch ein zweites Argument, das nicht von dem Satz »alle Sätze sind falsch« ausgeht, sondern von einem beliebigen Satz. Ist dieser wahr, so gibt es einen wahren Satz. Ist er nicht wahr, so ist der Satz, der ausdrückt, dass der erste Satz falsch ist, ein wahrer Satz. Also gibt es in jedem Fall (*tertium non datur*) mindestens einen wahren Satz / eine Wahrheit *an sich*. – Zu diesen beiden Beweisen vgl. auch den Beitrag von Edgar Morscher in diesem Band.

⁹ Cantor analysierte und widerlegte eine Reihe von angeblichen »Beweisen« für die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen. Dies tat er in Publikationen, z.B. in (Cantor 1885/6), aber auch in einer Reihe von Briefwechseln. Vgl. dazu auch (Tapp 2005, 90–99).

weis ähnelt dem Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen in der Zahlentheorie: Man nehme an, dass es nur die Wahrheiten t_1, \dots, t_n gibt; dass es keine Wahrheit außer t_1, \dots, t_n gibt, wäre dann eine weitere Wahrheit. Für jede natürliche Zahl n gibt es also mehr als n Wahrheiten – d. h., es gibt unendlich viele (vgl. auch WL I §32). Hier wird in einem philosophischen Kontext also offenbar der mathematische Begriff einer unendlichen Quantität als einer alle natürlichen Zahlen übersteigenden Quantität verwendet.

Interessant ist im Übrigen, dass Bolzano in dem folgenden §13 von RW I ein ähnliches Argument bringt, um zu zeigen, dass wir unbestimmt viele Wahrheiten kennen bzw. unbestimmt viel Wissen haben. Man beachte aber, dass es hier »unbestimmt viel« heißt und nicht »unendlich viel«. Obwohl das Argument also dem für die unendlich vielen Wahrheiten *an sich* sehr ähnlich ist, kommt Bolzano auf der epistemischen Seite zu einer anderen Schlussfolgerung. Er hat m. E. eine sehr klare Vorstellung von dem, was man »Epistemische Differenz« nennen könnte: den Unterschied zwischen dem, was der Fall ist, und dem, wovon wir wissen, dass es der Fall ist. Ich halte dieses klare Bewusstsein der epistemischen Differenz auch für den Hauptgrund dafür, dass Bolzano sich nicht in den traditionellen begrifflichen Wirrwarr von potentieller und aktueller Unendlichkeit verfängt. Potentielle Unendlichkeit hält er nur für einen sinnvollen Begriff in Bezug auf unsere epistemischen Fähigkeiten (oder Unfähigkeiten), unendliche Vielheiten Schritt-für-Schritt zu erfassen.¹¹ Ob eine unendliche Vielheit objektiv gesehen unendlich ist oder nicht, hält Bolzano von dieser Frage klar getrennt.

Ein weiteres Beispiel für eine präzise Verwendung des quantitativen Unendlichkeitsbegriffs in philosophischen Zusammenhängen ist Bolzanos Kritik an Gottesbeweisen. Ich möchte auf zwei instruktive

Beispiele eingehen: *Erstens* auf seine Kritik an Beweisen, die auf Gott als erste Ursache schließen wollen (z.B. Thomas von Aquins *prima via*). Ein solches Beweisschema krankt nach Bolzano daran, dass es ein Regressausschlussprinzip verwendet, nach dem eine unendliche Kette von Bedingungen unmöglich sei. Bolzano scheint dabei davon auszugehen, dass Bedingungen und Gründe miteinander identifiziert werden können. Er hält es für unproblematisch, dass man bei einer Begründung wieder nach deren Grund fragt, dann nach dem Grund für diesen Grund der Begründung usw., ohne an ein Ende zu kommen. Bolzano illustriert dies mit dem Beispiel eines Atoms, das sich in endlicher Zeit stetig von A nach B bewegt. Jeder Punkt C auf der Linie AB repräsentiert eine Bedingung für den Endzustand des Atoms in B, da das Atom C passiert haben muß, um zu B zu gelangen. Es gibt aber unendlich viele Punkte vor B, d. h. es gibt unendlich viele Bedingungen dafür, dass das Atom in B eintrifft. Daher, schließt Bolzano, gibt es Ketten von Bedingungen, die ins Unendliche gehen (RW I §68).

Er macht dabei einen wichtigen Punkt ganz deutlich: Dass die Kette ins Unendliche geht, impliziert nicht, dass es keinen ersten Punkt der Bewegung gibt – das war im Beispiel ja der Punkt A. Auch wenn viele das nicht einsehen: Dass ein erstes Element sozusagen »unendlich viele Kettenglieder weit weg« sein müsste, bedeutet nicht, dass es kein erstes Element geben kann.

Bolzano hat also bei der in der Philosophie häufigen Argumentation mittels Ausschluß eines infiniten Regresses zwei entscheidende Punkte gesehen: Dass dieses Schlußprinzip nicht grundsätzlich gilt, sondern höchstens in besonderen Einzelfällen, in denen man seine Berechtigung im Einzelnen nachweisen muss, und dass aus der Unendlichkeit einer Kette nicht folgt, dass es kein erstes Element gibt.

Ein *zweites* Beispiel für Bolzanos Kritik an Gottesbeweisen bezieht sich auf eine Argumentform, die man häufig bei idealistisch beeinflussten christlichen Theologen findet. Das Schema ist etwa so: Alle Wahrheiten können gedacht werden, aber sie könnten nicht gedacht werden, wenn es keinen Geist gäbe, der sie denken kann. Also muss

¹¹ Bolzano verwendet den Ausdruck »potentiell unendlich« meines Wissens überhaupt nicht. Jan Berg verwendet ihn in seinen Einleitungen zu GA I, 12/1, S. 12 und GA I, 13/2, S. 12, im Rahmen seiner Darstellung von Bolzanos Beweis dafür, dass wir unbestimmt viele Wahrheiten wissen (WL I §41). Sachlich zur Problematik des sog. »potentiellen Unendlichen« vgl. auch Bolzanos Ausführungen in PU §11.

es einen unendlichen Geist geben. Der menschliche Geist aber ist nicht unendlich, also muß es einen nicht-menschlichen, unendlichen Geist geben – Gott.¹² In §54 von RW III kritisiert Bolzano solche Argumentationsschemata in drei Hinsichten: 1.) dass eine Wahrheit gedacht werden kann, setzt nur die Möglichkeit eines entsprechenden Geistes voraus, nicht seine Wirklichkeit – so wie die Möglichkeit eines Hauses nicht einen wirklichen Architekten, sondern nur die Möglichkeit eines solchen voraussetzt. 2.) Das Argument begeht einen Quantorenvertauschungsfehler, der allerdings in Formulierungen wie der obigen recht gut versteckt ist. Aus den ersten Prämissen folgt höchstens die Zwischenkonklusion, dass es zu jeder Wahrheit einen Geist geben muss (damit sie gedacht werden kann). Weitergearbeitet wird aber mit einer weitaus stärkeren Aussage, nämlich dass es einen Geist gibt, der alle Wahrheiten denkt bzw. denken kann. Dies ist der bekannte Fehlschluss, dass man daraus, dass jeder eine Zeitung liest, schließt, dass es eine Zeitung gibt, die von jedem gelesen wird; formal betrachtet der Fehlschluss, einen \exists -Quantor vor einen \forall -Quantor zu ziehen. Bolzano zeigt aber, dass man diesen Fehler durch eine Zusatzüberlegung reparieren kann: Da alle endlichen Geister nur endlich viele Wahrheiten denken können, so gilt der Schluss dennoch, falls man annehmen kann, dass es nur endlich viele solcher endlichen Geister gibt. An dieser Stelle ist bemerkenswert, dass Bolzano von endlichen Geistern zu deren Fähigkeit, nur endlich viele Wahrheiten zu wissen, übergeht und umgekehrt, und diesen Übergang als nicht weiter diskussionsbedürftig ansieht. Was ein »endlicher Geist« ist, lässt Bolzano hier offen. Wenn es *per definitionem* so wäre, dass ein endlicher Geist eben einer ist, der nur endlich viele Wahrheiten denken kann, wäre der Übergang trivialerweise

¹² Argumente ähnlicher Form findet man in jüngster Zeit etwa bei Hans Jonas (1990) oder Robert Spaemann (1999, 2007a, 2007b). Spaemanns »Argument aus dem *futurum exactum*« lautet in etwa: Was ist, wird gewesen sein. Es kann nicht sein, dass es nicht gewesen sein wird. Daher muß es, sagt Spaemann, irgendwo »gespeichert« sein – in seinen Augen im Geist Gottes. Diese Argumente behandeln jedoch Probleme des Seins und der Zeit, nicht so sehr der Unendlichkeit.

gerechtfertigt. Soll die Endlichkeit unserer menschlichen Geister aber eine echte Begründungsleistung erbringen, so wäre es näherliegend, dass Bolzano hier einen eigenen, metaphysisch-qualitativen Endlichkeitsbegriff benutzt hat. Doch dann wäre eben der Übergang zwischen der qualitativen Endlichkeit der Geister und ihrer Fähigkeit, nur endlich viele Wahrheiten wissen zu können, seinerseits wieder begründungsbedürftig. 3.) und am grundsätzlichsten fragt Bolzano, was eigentlich die Annahme rechtfertigt, dass jede Wahrheit einen Geist voraussetzt, der sie denkt. Entweder, dies ist eine gewichtige metaphysische These. Dann wäre sie begründungsbedürftig. Oder es ist eine analytische Wahrheit, dass Wahrheiten einen Geist voraussetzen, der sie denken kann. Dann aber müsste man für die Behauptung, dass es unendlich viele solche Wahrheiten gibt, deutlich mehr Begründungsarbeit leisten. (Bolzano selbst spricht davon, dass man in dem Fall nicht mehr *behaupten* könne, dass die Menge der Wahrheiten unendlich sei, »ohne *petitionem principii* zu begehen«, RW III 119).

Als ein letztes Beispiel für Bolzanos Verwendung von »unendlich« in philosophischen Kontexten möchte ich seine Diskussion der Frage anführen, ob es unendliche Mengen aktueller, d. h. wirklicher Gegenstände geben kann.¹³ Bolzanos inhaltliche Position hier ist klar: Es gibt nichts, was begrifflich dagegen spricht; und mit dem Wissen Gottes gibt es zumindest einen Fall, in dem wir von einer unendlichen Menge von Wirklichem sprechen müssen, nämlich der Menge der von Gott gewußten Wahrheiten *an sich*.¹⁴ Diesen Zusammenhang mit der Allwissenheit werde ich später noch etwas ausleuchten. Hier möchte

¹³ Bolzano selbst verwendet (fast?) nie den Ausdruck »aktuell«, sondern spricht durchgängig von »wirklich«. Diesen Hinweis verdanke ich Edgar Morscher.

¹⁴ Bolzano fügt in WL I 413 hinzu, er habe in §78 gezeigt (der Verweis müßte auf §79 (WL I 379f.) gehen), dass man zumindest in Gott eine Aktualität annehmen müsse, die unendlich sei. Wichtig ist hier ferner, dass wir nicht nur die Menge der Wahrheiten *an sich* betrachten dürfen, sondern die Menge der von *Gott gedachten* Wahrheiten: Wahrheiten *an sich* sind nämlich nach Bolzano nichts Wirkliches – gedachte Wahrheiten hingegen schon.

ich lieber erwähnen, wie Bolzano die wichtigsten Argumente für die Unmöglichkeit unendlicher Mengen aktualer Gegenstände widerlegt. Am Ende des §87 der WL I behandelt er drei prominente Einwände gegen unendliche Mengen Aktualer.¹⁵ Zunächst führte er die Leibnizschen Einwände auf die ihnen zugrundeliegende Annahme zurück, der Unendlichkeitsbegriff schließe Unbestimbarkeit ein. Diesen Zusammenhang lehnt Bolzano aber mit überzeugenden Argumenten ab. Ich komme darauf am Schluß meines Beitrags zurück.

Das zweite Gegenargument ist die Behauptung von Gerdil (einem Philosophen, Theologen und späteren Kardinal), dass ein Übergangspunkt zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen nicht vorstellbar sei. Mit diesem Gegenargument wird Bolzano schnell fertig, denn es gibt keinen Grund, warum ein solcher Übergangspunkt überhaupt notwendig sein sollte.

Das dritte Gegenargument schließlich ist kosmologisch-temporaler Natur. Für viele Philosophen und Theologen sei es schwierig, sich eine unendliche Menge vergangener Weltzustände vorzustellen. Mit dieser Schwierigkeit sei häufig die Überzeugung verbunden, dass eine unendliche Kette von Vorgängerzuständen den jetzigen Zustand unmöglich machen würde. Hier bringt Bolzano noch einmal sein Beispiel einer stetigen Bewegung eines Atoms von A nach B: Trotz unendlich vieler Zwischenzustände ist der Endzustand in B natürlich nicht unmöglich. Und daher sei es, so Bolzano, ein Trugschluß, wenn man daraus, dass ein bestimmter Weltzustand eine unendliche Menge von Vorgängerzuständen voraussetzt, darauf schließt, dass dieser Zustand unmöglich wäre.

Etwas deutlicher wird Bolzano übrigens in RW III (§147), wo er diskutiert, warum das Christentum nie die Unendlichkeit der Welt

¹⁵ Bolzano spricht übrigens, so weit ich sehe kann, in diesen Zusammenhängen immer von unendlichen Mengen »wirklicher« (aktualer) Gegenstände und nie von aktual unendlichen Mengen von Gegenständen. Diese zwei verschiedenen Begriffe werden häufig in verwirrender Weise miteinander vermischt. Gelegentlich gilt sogar die Frage, ob es unendlich viele aktuale Gegenstände gibt/geben kann, als »das« Problem des Aktual-Unendlichen. Bolzano vermeidet diese unsaubere Sprechweise.

(im Sinne, dass sie keinen Anfang vor endlicher Zeit gehabt habe) gelehrt hat. Manchen Leuten, »im Denken ganz Ungeübten«, erscheine eben eine unendliche Menge von Weltzuständen in der Vergangenheit als inkompatibel mit dem Schöpfungsglauben. Der sachliche Hintergrund sei der verfehlte Glaube, dass eine Ursache ihrer Wirkung zeitlich vorausgehen müsse. Auch wenn Bolzano an die Unendlichkeit der Welt glaubte, hielt er es daher für eine weise Entscheidung des Christentums, die Unendlichkeit der Welt zu versiegeln, statt sie offen zu lehren. Aufgrund der offiziellen und weiter reichenden Lehre von der *creatio continua*, der Erhaltung der Schöpfung, würden schon die wichtigsten Mißverständnisse abgehalten, die sich sonst leicht bei der Annahme eines zeitlichen Weltanfangs einstellten (z.B., dass es nach dem originären Schöpfungsakt den Schöpfer nicht mehr bräuchte u.ä.). Dieser Abschnitt der RW III endet mit einer interessanten Verknotung von Unendlichkeitsaussagen: Eine *unendliche Welt* würde Gottes Allmacht und Unermesslichkeit vollkommen offenbar machen. Dadurch würden unsere Bewunderung, Liebe und Dankbarkeit dem Schöpfer gegenüber ansteigen, und wir würden fühlen, dass er unsere *unendliche Bewunderung* und Dankbarkeit verdiente, wenn wir nur dazu fähig wären (RW III §147).

4. Theologie/Philosophische Gotteslehre

Auch in Kontexten, in denen es um Gott geht, spielt das quantitative Unendliche häufig eine wichtige Rolle. Ich möchte einige Elemente aus Bolzanos Gotteslehre herausgreifen, um dies zu zeigen.

In der RW I argumentiert Bolzano für mehrere Ingredienzen seiner Gotteslehre, auf die er in Teil III zurückkommt. Das Zentrum seiner Lehre ist, dass Gott als das vollkommenste Wesen mindestens vier Arten von Kräften haben muss: *denken* (einschl. *vorstellen, erkennen, schließen*), *empfinden angenehm/unangenehm, wünschen und*

wollen (§75) – und all diese Kräfte in maximalem Grad, der unter Annahme der übrigen Kräfte möglich ist (§74).¹⁶

Gottes Kraft zu wissen etwa wird korrekt mit Allwissenheit umschrieben, denn (§76): Nach dem Grundprinzip der göttlichen Vollkommenheiten muss Gottes Kraft zu Wissen so groß wie möglich sein, gegeben die anderen Kräfte und die Forderungen nach deren Maximalität. Nun ist die Wißkraft aber nicht durch die anderen Kräfte begrenzt, also muss sie so groß sein, wie sie in sich nur sein kann. Das Ziel des Wissens schließlich sind Wahrheiten und jede Wahrheit ist wissbar. Also muss Gottes Wissen alle Wahrheiten umfassen – und das bedeutet Allwissenheit.

Man beachte, dass in RW I in diesem Zusammenhang keine Rede von Unendlichkeit ist: Allwissenheit wird vielmehr durch eine Allaussage bestimmt und diese Allaussage wird durch die Maximalitätsforderung begründet, die sich ihrerseits aus Gottes Vollkommenheit plus der Zusatzannahme, dass es sich bei den genannten Kräften um positive Eigenschaften handelt, ergibt.

In RW III, wo Bolzano die spezifisch christliche Gotteslehre behandelt, kommt er auf die Allwissenheit zurück. Hier nun aber ausdrücklich mit Bezug auf Unendlichkeit. Es sei christliche Lehre, dass Gottes geistige Kapazitäten unendlich seien (RW III §52). Und damit sei gemeint, dass Gottes Intellekt alles umfasse, was erkennbar sei, also alle Wahrheiten »an sich«.¹⁷ Außerdem folge, da Gott alles Wissbare

weiß, auch dass er immer weiß, wie er seine Ziele am besten erreichen kann, und das heißt, dass er unendlich weise ist.¹⁸

Diese begriffliche Fassung von Allwissenheit und vollkommener Weisheit mittels der Unendlichkeit hat eine gewisse Merkwürdigkeit. Sie steht in Spannung zu der Fassung aus RW I nach der Allwissenheit bedeutet, alles Wissbare zu wissen. Beides ist begrifflich nicht identisch:¹⁹ Natürlich gibt es nach Bolzano unendlich viel Wissbares, aber darin, alles zu wissen, ist nicht schon eingeschlossen, dass es sich dabei um unendlich Vieles handelt. (Natürlich beweist Bolzano dann eben doch, dass es unendlich viele Wahrheiten *an sich* gibt – siehe oben den Beginn von Abschnitt 3) Und die umgekehrte Implikation gilt schon gleich gar nicht: Daraus, dass man unendlich viel weiß, folgt nicht einmal näherungsweise, dass man alles weiß

¹⁸ Gottes unendliche Weisheit greift Bolzano in einem Argument für die Vernünftigkeit der Lehre von Gottes Gerechtigkeit wieder auf (RW III §74). Seine Weisheit und Heiligkeit führen dazu, dass Gott immer so entscheiden müsse, dass kein Mensch und überhaupt kein endlicher Intellekt jemals besser entscheiden könnte. Die Unendlichkeit von Gottes Intellekt fungiert hier also im Sinn einer oberen Schranke: Seine Weisheit muß größer sein als die aller endlichen Wesen. Dazu müßte sie nicht unbedingt einen unendlichen »Wert« haben, wenn diese Funktion auch bei endlichen »Werten« realisierbar wäre; sie muß auf der anderen Seite aber auch nicht die kleinste obere Schranke sein, sondern kann auch die bestmöglichen geschöpften Vermögen noch übertreffen.

¹⁹ Dass es sich dabei um zwei verschiedene Begriffe handelt, lässt sich wie folgt zeigen: Man nehme an, dass Gott alles weiß mit Ausnahme einer einzigen Wahrheit an sich. In einer solchen (kontrafaktischen, vielleicht gar unmöglichen) Situation ist Gottes Wissen immer noch unendlich, da selbst wenn wir von Gottes Überzeugungssystem nicht nur p, sondern aufgrund der holistischen Natur des Wissens und der Bedeutung auch eine Menge umgebender Wahrheiten entfernen müßten (solange man keinen Ultra-Holismus vertritt, nachdem man keine Wahrheit entfernen kann, ohne alle Wahrheiten zu entfernen – das wäre aber eine unplausible Position, dergemäß man nichts lernen könnte). Die Menge des von Gott Gewußten bliebe dann unendlich, da schon eine einzige gewußte Proposition eine abzählbar unendliche Menge von weiteren gewußten Propositionen nach sich zieht. Gottes Wissen wäre aber auch begrenzt, da es eine bestimmte Grenze hat: Es reicht nicht bis zu p. Sein Wissen wäre also begrenzt und in diesem Sinne endlich und nicht unendlich. In diesem Fall müßte man also sagen, dass sein Wissen unendlich und nicht unendlich wäre, was nur Sinn macht, wenn zwei verschiedene Begriffe von Unendlichkeit zugrundeliegen.

¹⁶ In einem längeren Einschub in Bolzanos 1818er Manuskript der RW legt er die Methodik der Gotteslehre an dieser Stelle offen: Die Begriffe der verschiedenen Kräfte entnehmen wir dem Bereich unserer menschlichen Erfahrung. Bei der Übertragung auf Gott müßten sie Gottes Vollkommenheit gemäß so weit ausgedehnt werden, wie es unter der Maßgabe der übrigen Kräfte möglich ist. Bolzano verwendet hier also drei entscheidende Voraussetzungen für die Gotteslehre: 1.) Gottes Allvollkommenheit; 2.) dass die betreffenden Kräfte Vollkommenheiten sind (also sie zu haben besser ist, als sie nicht zu haben); und 3.) dass die Kräfte umso vollkommener sind, je weiter sie sich erstrecken. Zu Bolzanos Methodologie der Gottesegenschaften vgl. auch RW III §100.

¹⁷ Bolzano RW III §52. Auch unsere Irrtümer kann Gott nach Bolzano kennen, jedoch nur formal, nicht material: Gott könne wissen, dass jemand dem Irrtum p unterliegt, nicht aber p selbst; vgl. RW I §76.

(wenn man eine Proposition p und mit jeder Proposition q auch die Proposition »Ich weiß q« wüsste, wüsste man zwar abzählbar unendlich viel, aber doch unglaublich wenig und sicher nicht alles).²⁰

Will man Bolzano keine begriffliche Unsauberkeit unterstellen, ist m. E. die nächstliegende Erklärung, dass er hier einen anderen, spezifisch theologischen, eher qualitativen als quantitativen Unendlichkeitbegriff verwenden will. Dass Gottes intellektuelle Kapazitäten unendlich sind, bedeutet dann nicht, dass Gott unendlich viele Wahrheiten weiß, sondern dass diese Kapazitäten keine Grenze, kein Ende haben, und sich daher auf Alles erstrecken, ohne Ausnahmen. Damit reduzierte sich diese Lehre letztlich auf die schon in RW I verwendete Maximalitätsforderung.

Dass hier ein anderer Unendlichkeitsbegriff im Spiel ist, legt sich auch von einer anderen Stelle in RW I nahe, wo es um Allmacht geht. Ich kann nicht das ganze Netz von Argumenten durchgehen, sondern will nur ein paar Beobachtungen notieren. Bolzano fragt: Wie groß ist Gottes Kraft, auf etwas Äußerliches einzuwirken? Bei uns Menschen, sagt er, ist diese Kraft auf mehrere Weisen begrenzt: a) durch die Begrenzung unserer Denkkraft (wir streben nicht nach etwas, von dem wir fälschlicherweise glauben, dass es unmöglich ist, oder was wir schlicht vergessen haben) und b) durch unsere begrenzte Kraft zu *wollen*, nach der wir manchmal etwas nicht ausführen, obwohl wir es könnten und wissen, dass wir es könnten, es aber einfach nicht wollen. Unsere Kräfte, etwas Äußerliches zu bewirken sind also begrenzt/endlich. Anders bei Gott: Er leidet nicht unter diesen Be-

²⁰ Einen Erklärungsansatz für diese Spannung bekommt man vielleicht aus RW III §53, wo Bolzano ausführlich Psalm 139 zitiert, um die Übereinstimmung seiner Lehre mit der Bibel zu demonstrieren. Zentral sind vor allem die Verse 17-18b:

»Wie schwierig sind für mich, o Gott, deine Gedanken, wie gewaltig ist ihre Zahl! Wollte ich sie zählen, es wären mehr als der Sand.«

Die Zahl der Sandkörner ist sicher eine Metapher für eine unbeschreiblich große Zahl. Vers 17b jedoch spricht in der Einheitsübersetzung von einer »gewaltigen« Zahl, während es in Bolzanos Bibel hieß »wie unendlich ist ihre Zahl« (meine Übers., vgl. RW III §53). Man findet hier zumindest eine Vorlage dafür, dass Bolzano Gottes intellektuelle Kräfte als »unendlich« bezeichnet.

schränkungen, sein Wille ist unendlich vollkommen (vgl. RW III §57), er kann tun, was immer an sich möglich und mit seinen sonstigen Eigenschaften kompatibel ist. Insofern ist seine Allmacht unbeschränkt, unbegrenzt oder eben *in-finit*.

Bolzano spricht an mehreren Stellen gleichsam »nebenbei« von der Unendlichkeit Gottes. Er nennt Gott den »unendlichen Urheber aller Dinge« (RW III §68), aber auch das »unendliche Wesen« (RW III §76). An den meisten dieser Stellen wird nicht erklärt, was unter »unendlich« zu verstehen ist. An anderer Stelle habe ich einmal zwischen einer synkategorematischen Verwendung als Operator, der herkömmliche positive Eigenschaften zu Vollkommenheiten steigert (z.B. unendliche Güte), und einer kategorematischen Verwendung unterschieden, in der das Begriffspaar endlich-unendlich präkategorial, *vor* Anwendung jeglicher »weltlicher« Kategorien verwendet wird, um den Bereich des Geschaffenen vom Schöpfer abzugrenzen.²¹ Mir scheint, dass hier bei Bolzano eine Art Verschränkung beider Verwendungsweisen vorliegt: Er verwendet »unendlich« auf der grammatischen Oberfläche kategorematisch, aber nicht im präkategorialen Sinne, sondern gewissermaßen als Abkürzung für eine Reihe synkategorematischer Verwendungen. Ganz deutlich wird dies in einer kurzen Stelle aus PU, wo Bolzano sagt,

dass selbst in Gott [...] sich Gesichtspunkte nachweisen lassen, aus welchen wir eine unendliche Vielheit in ihm erblicken, und dass es eben nur diese Gesichtspunkte sind, aus denen wir ihm Unendlichkeit beilegen (PU §11).

Diese Stelle klingt fast so, als wolle Bolzano Gott *nur* in dem Sinne »unendlich« genannt wissen, dass man den quantitativen Unendlichkeitsbegriff zur Explikation einer ganzen Reihe von Gottes-eigenschaften verwendet. Dies könnte man eine reduktionistische Sicht nennen, insofern bestimmte Verwendungskontexte des Ausdrucks »unend-

²¹ Siehe (Tapp 2008, 246).

lich«, die man sonst eher einer qualitativen Bedeutung zurechnen würde, auf die quantitative Bedeutung zurückgeführt werden.

In aller Kürze will ich noch eine besondere Verwendung des Unendlichkeitsprädikats in der Gotteslehre erwähnen, die bei Bolzano zum Vorschein kommt, wenn er etwa in RW III §95 Gottes unendliche Seligkeit behandelt. Sie röhre daher, dass Gott die Kraft habe, seinen eigenen Zustand zu erkennen. Diese Selbsterkenntnis sei, so Bolzano, »vollkommen rein, ununterbrochen und von unendlichem Grade«. Hier spricht Bolzano also von unendlichen Graden, unendlichen Intensionen (nach der klassischen Terminologie). Ich möchte offenlassen, ob es sich dabei um einen quantitativen Grad handelt, eine Maximalitätsangabe oder etwas anderes.

5. Wo Bolzano nicht von Unendlichkeit spricht

Die von mir behauptete klare Begrifflichkeit zeigt sich natürlich nicht nur daran, dass Bolzano bestimmte Ausdrücke in bestimmten Kontexten verwendet, sondern auch daran, dass er bestimmte Ausdrücke in bestimmten Kontexten gerade nicht verwendet. Hierzu sei nur ein Beispiel kurz erwähnt.

Im §69 von RW I argumentiert Bolzano für die unbedingte Notwendigkeit Gottes. Eine Sache ist nach Bolzanos Definition notwendig, wenn ihre Nichtexistenz begrifflich unmöglich ist.²² Unbedingte Notwendigkeit bedeutet dann, dass die Notwendigkeit nicht von etwas abhängt, was nicht selbst notwendig wäre. Dies ähnelt der modallogischen Unterscheidung von *necessitas consequentiae*, $\Box(p \rightarrow q)$, und *necessitas consequentis* $p \rightarrow \Box q$. Die erste, die *necessitas consequentiae*, gilt etwa für kontingente Verursachung (die Wirkung kann notwendig sein unter der Bedingung, dass die Ursache tatsächlich da ist, auch wenn beide, Ursache und Wirkung, in sich betrachtet kontingent sind). Die zweite, die *necessitas consequentis*, behauptet

die Notwendigkeit der Konsequenz q ohne weitere Bedingung: Wenn p kontingenterweise faktisch der Fall ist, so muß q schon notwendig sein. Bolzano will dann beweisen, dass Gott ein unbedingt notwendiges Wesen ist. Unbedingtheit und Unendlichkeit sind dabei für Bolzano zwei verschiedene Begriffe. (Unendlichkeit wird an dieser Stelle der RW nur im quantitativen Kontext gebraucht.) Dies scheint mir eine größere Differenz zu größeren Bereichen der philosophischen und theologischen Tradition zu sein, besonders zum Deutschen Idealismus.

6. Ein allgemeiner Unendlichkeitsbegriff

Bolzano äußert sich kaum zu Zusammenhängen zwischen mathematisch-quantitativem und metaphysisch-qualitativem Unendlichen. (Abgesehen von den trivialisierenden Zusammenhängen, die sich aus der reduktionistischen Sicht der PU ergeben.) Es gibt aber einige wenige Stellen, die nahelegen, dass Bolzano hier einen Zusammenhang gesehen hat, auch wenn beide Begriffe verschieden sind.

So spricht er in §55 von RW III über den moralischen Wert seiner Lehre von Gottes Allwissenheit im Sinne eines unendlichen Wissens aller Wahrheiten. Dazu beginnt er eine lange Liste darüber, wie viele Zahlen es gibt, wieviele Terme man daraus bilden kann, wieviele Gleichungen zwischen diesen Termen gültig sind, wie viele geometrische Objekte es gibt, wie viele Objekte und Relationen in der wirklichen Welt usw. Wenn wir eine solch ausgedehnte Liste betrachten, können wir, so Bolzano, nur noch auf unsere Knie sinken vor dem Unendlichen, da wir so spüren oder ahnen können, was es bedeutet, unendlich zu sein. Die quantitative Unendlichkeit der Mathematik gibt uns auf diese Weise einen Eindruck davon oder ein Gefühl dafür, wie groß ein Gott ist, dem man Allwissenheit zuschreibt.

Im Rahmen der Gotteslehre hatten wir bemerkt, dass Bolzano Gottes Allwissenheit in RW I als Wissen aller Wahrheiten, in RW III jedoch als unendliche Wissenskraft bestimmt. Dies schien merkwürdig, da unendlich viel zu wissen nicht impliziert, alles zu wissen, und alles

²² Bolzano sagt wörtlich, dass die Nicht-Existenz einer solchen Sache einer »reinen Begriffswahrheit« widerspräche.

zu wissen zumindest begrifflich nicht einschließt, dass das unendlich viel ist. Die Annahme, dass bei Bolzano ein allgemeinerer Unendlichkeitsbegriff im Hintergrund steht, konnte diese Spannung auflösen.

Des Weiteren hatten wir bei Bolzanos Widerlegung des idealismusverdächtigen Arguments für die Existenz eines unendlichen Geistes gesehen, wie er im Rahmen dieser Kritik relativ problemlos zwischen der Endlichkeit eines Geistes und der Endlichkeit der Menge der von einem Geist gewussten Wahrheiten hin- und herwechselt. Man mag auch darin ein weiteres Indiz dafür sehen, dass bei Bolzano ein allgemeinerer Unendlichkeitsbegriff im Hintergrund steht.

Die grundsätzlichen Erörterungen zu dieser Frage finden sich meiner Meinung nach in WL I §87, wo Bolzano diskutiert, wie Andere den Unendlichkeitsbegriff definieren. Die hier gewählten vier Kandidaten sind inhaltlich weit und philosophiehistorisch bedeutsam.

Der erste Kandidat ist die Unbestimmtheit: Etwas sei unendlich, wenn man es nicht angeben oder bestimmen könne. Bolzano lehnt diese Konzeption klar ab. Ich möchte aus seiner ausführlichen Diskussion nur ein Argument herausgreifen. Er meint, das einzige denkbare sinnvolle Verständnis von Unendlichkeit als Unbestimmtheit oder Unbestimbarkeit stamme daher, dass unendliche Mengen nicht durch ihr Verhältnis zu endlichen Mengen bestimmbar sind. Das stimme zwar, sagt Bolzano, aber Unbestimbarkeit in einer Hinsicht bedeutet nicht Unbestimbarkeit schlechthin. Und daher könne man unendliche Mengen nicht *per se* für unbestimbar erklären. Bolzano gibt hier ein schlagendes mathematisches Beispiel: Die Linie zwischen zwei Punkten im euklidischen Raum enthält unendlich viele Punkte. Die Menge dieser Punkte ist also unendlich, aber dennoch ist sie präzise bestimmt, wenn die beiden Endpunkte bestimmt sind. Darum mache es keinen Sinn, Unendlichkeit und Unbestimbarkeit zu identifizieren.²³ Im Gegenteil zeigt Bolzano später in §509

von WL IV, dass aus der Unendlichkeit – unter der zu verstehen sei, dass etwas in gewisser Hinsicht keine Grenze hat – mitnichten seine Unbestimmtheit folge. Einem unendlichen Ding kommt ja nicht nur die Eigenschaft der Unendlichkeit selbst zu, sondern auch Allwissenheit, Allmacht, Allgegenwart und so weiter.

»Ein Widerspruch wäre es nur, wenn Jemand sagte, dass auch dasjenige bestimmt werden könne, was an sich selbst unbestimmt ist. Allein unbestimmt an sich selbst ist – nichts.«²⁴

Der zweite Kandidat ist: »Unendlichkeit bedeutet Unvermehrbarkeit«. Bolzano hält diese Definition klar für falsch, da man die Menge der Punkte auf einer Linie zwischen zwei Punkten durch die Verlängerung der Linie über einen der Punkte hinaus vergrößern könne.²⁵ Es ist interessant, dass Georg Cantor später genau mit Hilfe dieses Kriteriums seine Unterscheidung zwischen dem Transfiniten und dem absolut Unendlichen durchgeführt hat: Das Transfinite teile mit dem Endlichen die Eigenschaft, noch vermehrbar zu sein. Das absolut Unendliche hingegen sei nicht vermehrbar. Was genau damit gemeint ist, ist allerdings auch Gegenstand der Diskussion.²⁶ Jedenfalls hat Bolzano schon völlig treffend antizipiert, dass Unvermehrbarkeit kein Charakteristikum des Unendlichen sein kann.

Der dritte Kandidat ist: »Eine Menge ist unendlich, wenn sie größer ist als jede mögliche Menge.« Diese Definition ist falsch bzw. un-

hier um einen möglichst allgemeinen Unendlichkeitsbegriff, der den quantitativen Sinn wie auch einen metaphysischen oder qualitativen umgreift. Die mathematischen Gegenbeispiele zeigen dann, dass die vorgeschlagenen Kandidaten dieses Kriterium schon auf Seiten der (einfacher handhabbaren) quantitativen Unendlichkeit nicht oder nur eingeschränkt erfüllen.

²⁴ WL I § 87. Bolzano verweist hier auf §45. Eine Fußnote der Editoren der Gesamtausgabe vermerkt »Bolzanos Paragraphenangabe ist unzutreffend«.

²⁵ Bolzano bietet eine klare Redeweise davon, dass auch Definitionen falsch sein können.

²⁶ Siehe dazu (Tapp 2011)

²³ Die mathematischen Gegenbeispiele sollten nicht zu der Fehleinschätzung verleiten, dass Unendlichkeit sich nach Bolzano letztlich nur auf quantitative Unendlichkeit reduziert oder reduzieren müßte. In meinen Augen geht es Bolzano

erfüllbar, denn eine Menge, die größer wäre, als jede mögliche Menge, könnte nicht selbst eine mögliche Menge sein.

Der vierte Kandidat schließlich ist die einfache Festlegung: »Etwas ist unendlich, wenn es kein Ende hat.« Dies sei, verglichen mit den anderen Versuchen, der beste. Man dürfe diese Definition der Unendlichkeit von x allerdings nicht so verstehen, dass x in jeder Hinsicht kein Ende haben dürfe. Auch hier bringt er sein Beispiel einer Linie zwischen zwei Endpunkten im euklidischen Raum: Mit ihren zwei Endpunkten hat sie natürlich in gewisser Hinsicht ein Ende. Kein Ende zu haben, muss in mathematischen Zusammenhängen, Bolzano zufolge, eher in dem Sinne verstanden werden, dass man beim Zählen nicht an ein Ende komme. Bolzano sagt selbst, dass ihn dieses Verständnis zu seiner mathematischen Definition motiviert hat. Hier müsste man allerdings hinzufügen, dass es um Zählen mit konstanter Geschwindigkeit und mit beliebig langer Zeit geht, also ein idealisiertes Zählen, kein faktisches, zu dem wir als Menschen in der Lage sein müssten.

Eine Menge s zu zählen bedeutet demnach, eine partielle eineindeutige Abbildung von den natürlichen Zahlen auf s anzugeben. Das Zählen endet, wenn alle Elemente von s mindestens einmal erreicht wurden. s heißt dann endlich, wenn alle solchen Zählungen enden. Äquivalent zu dieser Definition wäre, kurz zu sagen, dass eine Menge s unendlich ist, wenn es eine eineindeutige Abbildung der natürlichen Zahlen in s gibt.²⁷ Der Zusammenhang zwischen der präzisen mathematischen Definition der Unendlichkeit und dem allgemeinen philosophischen Konzept, keine Grenzen zu haben, wäre dann der folgende: Eine Menge ist unendlich im mathematischen Standardsinne genau dann, wenn sie keine Grenze im Bezug auf idealisiertes Zählen hat.

Bolzanos klare Differenzierung zwischen »in jeder Hinsicht keine Grenze haben« und »in bestimmter Hinsicht keine Grenze haben«

scheint mir dabei äußerst hilfreich zu sein. Die unendlichen Zahlen Cantors beispielsweise erfüllen ja nicht das Kriterium, in jeder Hinsicht keine Grenze zu haben. Allein schon dadurch, dass es zu jeder transfiniten Zahl eine größere gibt, ist jede dieser Zahlen begrenzt. Sie haben *in gewisser Hinsicht* keine Grenze, wie Bolzano mit dem idealisierten Zählen illustriert.

Hat Gott in jeder Hinsicht keine Grenze? Das wird man nach Bolzano auch nicht sagen können. Wir hatten ja gesehen, dass seine Vollkommenheiten jeweils auf das an sich Mögliche und das mit den übrigen Vollkommenheiten Kompatible beschränkt sind. Wenn das Christentum Gottes Intellekt, Gottes Weisheit oder Gottes Willen »unendlich« nennt, wird nach Bolzano damit vielmehr gesagt, dass bestimmte Begrenzungen, die wir von uns Menschen kennen, bei Gott wegfallen.

7. Zusammenfassung

Bolzano hat eine sehr klare Konzeption quantitativer Unendlichkeit, die er auch in philosophischen und theologischen Kontexten erfolgreich anwendet, z.B. wenn er die Unendlichkeit von Gottes Intellekt als ein Wissen von unendlich vielen Wahrheiten *an sich* bestimmt. Dabei blieb allerdings offen, wie der genaue Zusammenhang aussieht zwischen den vier Forderungen nach Maximalität der Vollkommenheiten, nach ihrer Exzellenz über das kreatürliche Maß, nach ihrem unendlichen Grad und nach ihrer unendlichen Extension. In seiner Gottesbeweis-Kritik wechselt Bolzano leicht zwischen der Endlichkeit von Geistern und der Endlichkeit der Menge der von diesen Geistern gewußten Wahrheiten hin- und her. Diese Beobachtung legte gemeinsam mit anderen Beobachtungen die Vermutung nahe, dass Bolzano im Hintergrund einen allgemeineren, philosophischen Unendlichkeitsbegriff mitführt. Als aussichtsreichster Kandidat dafür stellte sich die in fast schon trivialer Nähe zum Wort Sinn stehende Definition von Unendlichkeit als »was kein Ende hat« heraus.

²⁷ »In s « bedeutet dabei nicht, dass alle Elemente von s durch die Abbildung erreicht werden müssen. Die Abbildung muß injektiv, aber nicht unbedingt surjektiv sein.

Sie muss nach Bolzano allerdings um die Angabe einer Hinsicht ergänzt werden.

Literatur

Bolzano, Bernard [PU] *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: Reclam 1851. Zit. nach: *idem*, mit Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Bob van Rootselaar, Hamburg: Meiner 1975.

Cantor, Georg [GA]: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hrsg. v. Ernst Zermelo. Berlin: Springer 1932.

— [1885/6] Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actualunendlichen Zahlen. In: *Bihang till Kongliga Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar* 11, Nr. 19 (1885), S. 1–10. Unter dem Titel »Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche« auch in: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 88 (1886), S. 224–233. Zit. nach: (Cantor GA, 370–376, darin unter dem Titel: »Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche«)

— [1887/8]: Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, in: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91 (1887), 81–125 & 252–270, sowie 92 (1888), 240–265. Zit. nach: (Cantor GA, 378–439).

— [1896/7]: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, in: Mathematische Annalen 46 (1895), 481–512, sowie 49 (1897), 207–246. Zit. nach: (Cantor GA, 282–351).

Dedekind, Richard: *Was sind und was sollen die Zahlen*. Braunschweig: Vieweg 1888.

Jonas, Hans [1990]: Vergangenheit und Wahrheit. In: Scheidewege 20 (1990/91), 1–13; wiederabgedruckt in: Ders.: *Philosophische Untersuchungen und metaphysische Vermutungen*. Frankfurt: Suhrkamp 1992, 173–189.

Krickel, Frank [1995]: *Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*. (=BBF 5) St. Augustin: Academia 1995.

Spaemann, Robert [2007a]: *Das unsterbliche Gerücht. Die Frage nach Gott und die Täuschung der Moderne*. Stuttgart: Klett-Cotta 2007.

— [2007b]: *Der letzte Gottesbeweis. Mit einer Einführung in die großen Gottesbeweise und einem Kommentar zum Gottesbeweis Robert Spaemanns von Rolf Schönberger*. München: Pattloch 2007.

— [1999]: Das unsterbliche Gerücht, in: Merkur-Sonderheft »Nach Gott fragen. Über das Religiöse« 605/606, Stuttgart 1999, 772–783.

Tapp, Christian [2005]: *Kardinalität und Kardinale. Wissenschafts-historische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit* (= Boethius, Bd. 53). Stuttgart: Steiner 2005.

— [2008]: Unendlichkeit in Mengenlehre und Theologie. Über tatsächliche und scheinbare Beziehungen. In: *Unendlichkeit. Interdisziplinäre Perspektiven*. Hg. v. J. Brachtendorf, T. Möllenbeck, G. Nickel und S. Schaede, Tübingen: Mohr Siebeck 2008, 233–248.

— [2011]: Absolute Infinity – a Bridge Between Mathematics and Theology? In: *Foundational Adventures. Essays in Honor of Harvey M. Friedman*, hg. v. Neil Tennant. London: College Publications 2011 (im Druck).