Transfinite Schlussweisen in Hilbertschen Konsistenzbeweisen

Christian Tapp und Uwe Lück

1. In unserem Beitrag geht es um David Hilberts Programm finiter Konsistenzbeweise. Wir wollen einen Beitrag zu der vieldiskutierten Frage leisten, wo genau die Grenze zwischen finitem und nicht-mehr-finitem Schließen verläuft. Unser hauptsächliches Augenmerk wird Hilberts sogenannter „inhaltlicher Induktion" gelten, die sich von der üblichen vollständigen Induktion unterscheiden soll.

Methodisch verwenden wir als Ausgangsdaten oder Anknüpfungspunkte nicht nur philosophische Absichtserklärungen aus Hilberts Schule, sondern auch vorgelegte Beispiele von Konsistenzbeweisen. Man sollte meinen, dass in solchen Beispielen ausschließlich im Sinne des „finiten Standpunkts" geschlossen wird. Wir stoßen jedoch auf Argumentationsgänge, die Schlussweisen zu enthalten scheinen, die sie nach den expliziten Absichtserklärungen nicht enthalten dürften.

Wir gehen davon aus, dass Hilbert im nachfolgenden Zitat mit „transfiniten Schlussweisen" gerade Schlussweisen meint, die nicht mehr dem „finiten Standpunkt" entsprechen.

> Die transfiniten Schlußweisen werden in der gewöhnlichen Sprache durch folgende Stichworte bezeichnet: „*alle*", „*es gibt*", „*tertium non datur*", „*vollständige Induktion*", […] [Hilbert 1923, S. 156]

Die Konsistenzbeweise seiner Schüler G. Gentzen und W. Ackermann für die erststufige Arithmetik von 1936 bzw. 1938 und 1940 verwendeten transfinite Induktion bis ε_0; dies ist offenbar „auf jeden Fall" eine transfinite Schlussweise. Es ist inzwischen diskutiert worden, ob transfinite Induktion bis zu einer gewissen Ordinalzahl zwischen ω und ε_0 noch als finitistisch zulässig gelten kann. Dies ist allerdings erst angesichts der Arbeiten in den 30er Jahren belangvoll. Wir konzentrieren uns dagegen auf den „finiten Standpunkt" in den Schriften Hilberts und in der Dissertation Ackermanns aus den 20er Jahren, als es darum ging, ob bzw. inwiefern überhaupt die vollständige Induktion zu den finit zulässigen Beweismitteln zu rechnen ist.

Damals bestand offensichtlich die Absicht, in Konsistenzbeweisen die vollständige Induktion zu vermeiden:

> Die Paradoxien treten in der Mathematik nur da auf, wo es sich um unendliche Gesamtheiten handelt, wo die Worte „alle" und „es gibt" und die nur mit Hilfe dieser Worte zu formulierenden transfiniten Schlußweisen wie die „vollständige Induktion" und das „tertium non datur" gebraucht werden. Man würde sich also im Kreise drehen, wollte man diese Schlußweisen wieder bei den Widerspruchsfreiheitsbeweisen anwenden. Diese würden dann wieder dem Gebiet des Problematischen angehören, das man gerade vermeiden will. Diese Schwierigkeiten vermeidet nun Hilbert durch seine bekannte Unterscheidung zwischen Mathematik und Metamathematik. […] Da die Metamathematik nur Aussagen über konkrete, anschaulich vorliegende Dinge macht, so kommt sie ganz ohne transfinite Schlüsse aus. Sie benutzt nur solche primitive und endliche Schlußweisen, wie sie auch von den hartnäckigsten Skeptikern zugestanden werden. [Ackermann 1925, S. 1]

Hilbert war auch überzeugt, Ackermann habe tatsächlich einen Konsistenzbeweis unter Vermeidung solcher transfiniter Schlussweisen geführt:

> In seiner Arbeit „Begründung des ‚Tertium non datur‘ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit“ hat Ackermann im allgemeinsten Falle gezeigt, dass der Gebrauch der Worte „alle“ und „es gibt“, des „Tertium non datur“ widerspruchsfrei ist.[1] Der Beweis erfolgt unter ausschliesslicher Benutzung primitiver und endlicher Schlussweisen. [Hilbert Empfehlungsschreiben]

2. Demgegenüber überrascht uns R. Zach mit der Auffassung, Ackermann sei sich bei Abfassung seiner Dissertation 1924 der Verwendung transfiniter Induktion (etwa bis $\omega^{\omega^{\omega}}$) bewusst gewesen:

> Ackermann's original consistency proof […] uses transfinite induction […] Ackermann was completely aware of the involvement of transfinite induction in this case, but he sees in it no violation of the finitist standpoint. [Zach 2003, S. 234]

Ackermann selbst scheint später, in den späten 30er Jahren, die Verwendung transfiniter Schlussweisen in seiner Dissertation einzugestehen:

> Mir fällt übrigens jetzt, wo ich gerade meine Dissertation zur Hand nehme, auf, daß dort in ganz ähnlicher Weise mit transfiniten Ordinalzahlen operiert wird wie bei Gentzen. [Ackermann an Bernays 1936]

> Ich weiß übrigens nicht, ob Ihnen bekannt ist (ich hatte das seiner Zeit nicht als Ueberschreitung des engeren finiten Standpunkts empfunden), dass in meiner Dissertation transfinite Schlüsse benutzt werden. [Ackermann an Bernays 1938]

Wir haben hier keine Gelegenheit, die Frage der Verwendung transfiniter Induktion in Ackermanns Dissertation mit letzter Ausführlichkeit zu klären. Die angeführten Zitate sollen zunächst nur auf eine gewisse Unsicherheit in Hilberts Schule hinweisen darüber, ob die verwendeten Mittel nun finit waren oder nicht. Wir stimmen Zach nicht in seiner Folgerung aus den Briefzitaten Ackermanns zu, Ackermann sei sich über seine Verwendung der transfiniten Induktion völlig im Klaren gewesen. Die Zitate zeigen vielmehr Ackermanns *Überraschung*, die in Gentzens Konsistenzbeweis verwendete Schlussweise auch in seiner eigenen Dissertation zu finden. Wir stimmen auch nicht Zachs Formulierung zu, Ackermann „sehe“ (Präsens!) in der Verwendung dieser Mittel keine Verletzung des finiten Standpunkts. Ackermann zeigt sich 1938 erstaunt darüber, dass er diese Mittel 1924 für vom finiten Standpunkt aus zulässig hielt. Schließlich fragt er sich und Bernays, ob Bernays – der als für Ackermanns Dissertation zuständiger Assistent Hilberts die Arbeit sicherlich aufmerksam studiert hatte – aufgefallen sei, dass er die finite Methodik seinerzeit nicht konsequent beachtet habe. Ackermann sah seine Dissertation offenbar nach Gentzens Diskussion der transfiniten Induktion „mit anderen Augen“.

[1] Über vollständige Induktion sagt Hilbert nichts. Gilt die Beschränkung auf endliche Beweismittel etwa nicht für *sämtliche* Behauptungen der Dissertation?

3. Poincaré stellte Hilberts Programm schon auf dessen erste Vorstellung im Jahre 1904 [Hilbert 1905] hin in Frage, indem er behauptete, Hilbert sei zur Rechtfertigung insbesondere der vollständigen Induktion auf deren Verwendung als Hilfsmittel prinzipiell angewiesen. Dieselbe Kritik brachte Skolem [1923, 1930] zu Hilberts Veröffentlichung von 1922 [Hilbert 1922] vor, in der Hilbert ebenfalls von seinem Konsistenzprogramm handelte. Hilbert wandte sich ausdrücklich *gegen* diese Kritik. Wir konzentrieren uns in der Folge auf diesen Streit über die Verwendung vollständiger Induktion in Konsistenzbeweisen der Hilbertschen Schule.

4. Wir wollen zuerst deutlich machen, wo die Verwendung vollständiger Induktion in solchen von Hilberts Schule vorgelegten Konsistenzbeweisen in der Tat immer wieder ins Auge zu springen scheint.

Die Konsistenzbeweise laufen in etwa nach folgendem Schema ab:

(i) *Gegeben*: Formaler Beweis $\mathfrak{B}$ in Baumstruktur (Verzweigung bei *modus ponens*, keine Verzweigung bei Substitution) Endformel numerisch.
(ii) *Zu zeigen*: Endformel nicht $0 = 1$ bzw. $0 \neq 0$.
(iii) *Verfahren*: Ersetze jede Formel durch numerische Formel, so dass:
  (α) numerische Formeln unverändert bleiben,
  (β) Axiome durch wahre Formeln ersetzt werden,
  (γ) Schlussregelanwendungen in wahrheitserhaltende Fortschreitungen übergehen.

Nach Hilbert war für einen Konsistenzbeweis zu zeigen, dass kein *formaler* Beweis eine widersprüchliche Endformel hat, z. B. im Falle der Zahlentheorie $0 = 1$ oder $0 \neq 0$. Hilbert und Ackermann in seiner Dissertation nehmen dazu an, ein formaler Beweis aus der Zahlentheorie in Baumstruktur sei gegeben, der eine numerische Endformel hat. (Eine numerische Formel ist eine aussagenlogische Verknüpfung – einschließlich Negation – von Gleichungen zwischen Zahlzeichen.) Durch Ersetzen von Formeln wird erreicht, dass der Beweisbaum nur noch sogenannte „richtige“, d. h. wahre numerische Formeln enthält. Dazu wird ein Ersetzungsverfahren angegeben, das alle Axiome in wahre numerische Formeln und die Schlüsse (*modus ponens* und Substitution) in numerische Wahrheit erhaltende Übergänge überführt. Daraus wird auf die numerische Wahrheit der Endformel geschlossen. Das Ersetzungsverfahren lässt außerdem alle numerischen Formeln unverändert, insbesondere die Endformel. Aus dem Vorigen ergibt sich, dass diese wahr, also insbesondere nicht widersprüchlich ist.

Ackermanns gesamter Versuch eines Konsistenzbeweises nach Hilberts Vorgabe enthält viele Stellen, bei denen es sich jeweils um vollständige Induktion z. B. nach der Länge von Ausdrücken zu handeln scheint (oder auch um Bar-Induktion, was Beweisbäume betrifft). Das am meisten verblüffende Beispiel ist vielleicht die vorige Behauptung, jede der numerischen Formeln, durch die nach dem angegebenen Verfahren Beweiszeilen ersetzt werden, sei in Hilberts Ausdrucksweise „richtig“ (wahr) – insbesondere die *Endformel* des Beweises. Es scheint sich um eine vollständige Induktion nach der Höhe des Beweisbaums zu handeln, bei der sich der Induktionsanfang auf die im Beweis vorkommenden Axiome und der Induktionsschritt auf die formalen Schlüsse bezieht. In dieser Form würde vollständige Induktion in *jeden* Konsistenzbeweis der von Hilbert vorgeschlagenen Art eingehen, selbst dann, wenn mit Hilfe des Ersetzungsverfahrens lediglich die Konsistenz eines rein *aussagenlogischen* (Teil-)Systems bewiesen werden sollte.

5. Hilbert setzte sich gegen den Einwand, in Konsistenzbeweisen gemäß seinem Programm werde die vollständige Induktion verwendet, wie folgt zur Wehr.

> […] POINCARÉ […] bestritt […] von vornherein die Möglichkeit eines Beweises der Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome, indem er behauptete, daß die Widerspruchsfreiheit des Verfahrens der vollständigen Induktion nie anders als wieder durch das Induktionsverfahren bewiesen werden könnte. Aber wie meine Theorie zeigt, kommen hier, bei der Begründung der Arithmetik, zweierlei rekursiv verfahrende Methoden in Betracht, nämlich einerseits der anschauliche Aufbau der ganzen Zahl als Zahlzeichen, dem auch rückwärts der Abbau eines vorliegenden Zahlzeichens bzw. der Abbau einer analog einem Zahlzeichen aufgebauten konkret vorliegenden Figur entspricht – die *inhaltliche* Induktion, und andererseits die eigentliche *formale* Induktion, die sich auf das Induktionsaxiom stützt und durch die allein erst die mathematische Variable ihre Rolle im Formalismus zu spielen imstande ist.
>
> POINCARÉ gewinnt seine irrige Überzeugung dadurch, daß er zwischen diesen beiden völlig verschieden gearteten Induktionsmethoden nicht unterscheidet. [Hilbert 1928, S. 12]

Nun fragt sich, worin genau die „inhaltliche Induktion“ bestehen und sich von der vollständigen Induktion unterscheiden soll.

6. Zur Verdeutlichung der von uns favorisierten Erklärung der „inhaltlichen“ Induktion stellen wir kurz vier naheliegende Alternativinterpretationen vor, die wir als von den Quellen zu weit entfernt ablehnen. „Inhaltliche Induktion“ ist vielleicht:

(a) ein *eher vertrauenswürdiges* Prinzip, aus dem vollständige Induktion *ableitbar* ist;
(b) vollständige Induktion, *interpretiert* in Bereich „*konkret-anschaulicher*“ Objekte (so Ackermann?);
(c) vollständige Induktion für *eingeschränktes Vokabular*;
(d) jedenfalls etwas mit *Allaussage* als *Prämisse* (so Tait).

Ad (a): Die *inhaltliche* Induktion könnte irgendein „einfacheres“ Axiomenschema oder eine Schlussregel sein, aus der die übliche *formale* (im Zusammenhang anderer, weniger „zweifelhafter“ Schlussweisen) „ableitbar“ ist – vgl. Skolem:

> Die große Frage ist aber dann, ob man dies Prinzip mit Hilfe einfacherer Prinzipien beweisen kann und in einer solchen Weise, dass dabei nicht Eigenschaften eigentlicher Ausdrücke, Formeln, benutzt werden, welche selbst auf vollständiger Induktion beruhen oder damit gleichwertig sind. [Skolem 1930, S. 223]

Gegen diese Deutung spricht Hilberts Erklärung [Hilbert 1922], die *vollständige* Induktion (wohl identisch mit der *formalen* Induktion oder gewissermaßen ebenso „weittragend“) sei „weitertragend“ als „Auf- und Abbau“ der Zahlzeichen; ähnlich soll laut Hilbert [1928] noch nicht durch die *inhaltliche*, sondern erst durch die *formale* Induktion „die mathematische Variable ihre Rolle im Formalismus zu spielen imstande“ sein. Diese Deutung würde auch schlecht erklären, inwiefern inhaltliche und formale Induktion „völlig verschieden geartet“ sein sollen [Hilbert 1928].

Ad (b): Hilbert und Ackermann mögen an gewöhnliche vollständige Induktion unter Interpretation in einem Bereich „konkret-anschaulicher“ Dinge denken – diese Andersartigkeit des Interpretationsbereichs soll vielleicht die *wesentlich* größere „Vertrauenswürdigkeit“ *dieser* Induktion gewährleisten und schon insofern „völlig verschieden geartet“ im Vergleich zur „formalen“ Induktion sein. – Tatsächlich deuten Passagen aus Ackermanns Dissertation über vollständige [Ackermann 1925, S. 1] und über transfinite Induktion [Ackermann 1925, S. 13f.] unseres Erachtens darauf hin, dass Ackermann (anders als Hilbert) dieser Vorstellung anhing.

Ad (c): Die in Konsistenzbeweisen verwendete Metatheorie könnte vielleicht formal so rekonstriert werden, dass Induktionsaxiome nur für ein beschränktes Vokabular auftreten; insbesondere fehlen vielleicht Induktionsaxiome, in denen die Multiplikation vorkommt. Diese metatheoretische Induktion könnte so schwach sein, dass die vollständige Induktion der behandelten Zahlentheorie nicht in ihr relativ interpretierbar ist.

Ad (d): Tait behauptet in einer Diskussion von [Niebergall/Schirn 1998], in Hilberts „anschauliche Induktion“ gehe jedenfalls eine Allaussage als „Prämisse“ ein:

> [Hilbert 1928 – *C. T./U. L.*] explicitly states the “contentual”[2] principle of mathematical induction as a finitist principle. One premise of this principle is surely a general proposition. [Tait 2002, Fn. 4]

Wir meinen dagegen, dass die inhaltliche Induktion nach Hilbert *All*aussagen weder betrifft noch involviert.

7. Hilbert beschreibt 1922 sein Konzept finitistisch verantwortbarer Methoden in Analogie zur „anschaulichen Zahlentheorie“. Die Kommutativität der Addition wird in einer

besonderen Weise beschrieben, die als „Auf-/Abbau der Zahlzeichen“ das Vorbild für die finiten Methoden der Hilbertschen Beweistheorie sein soll.

2 Taits Formulierung „the ‚contentual‘ principle of mathematical induction“ zeigt bereits sein Missverständnis: Er meint, Hilbert habe erklärt, die übliche vollständige Induktion – auf englisch wird gerade diese „mathematical induction“ genannt – sei ein „inhaltliches Prinzip“. Wie wir unten näher ausführen, ist nach Hilbert die „inhaltliche“ Induktion tatsächlich etwas wesentlich anderes als die („formale“) vollständige Induktion. Hilbert meint gerade *nicht*, dass die übliche („formale“) vollständige Induktion „inhaltlich“ wäre.

> Und ebenso wäre vom gegenwärtigen Standpunkte aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ nur die Mitteilung der Tatsache, daß das Zahlzeichen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ dasselbe ist wie $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. Und dabei kann dann das inhaltliche Zutreffen dieser Mitteilung folgendermaßen eingesehen werden. Es sei – wie wir annehmen dürfen – $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, d. h. das Zahlzeichen $\mathfrak{b}$ rage über $\mathfrak{a}$ hinaus: dann läßt sich $\mathfrak{b}$ zerlegen in der Gestalt $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ zur Mitteilung einer Zahl diene; man hat dann nur $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ zu beweisen […] Dies ist aber der Fall, sobald […] $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ ist. Hierin ist aber gegenüber der ursprünglichen Mitteilung mindestens eine 1 durch das Abspalten von $\mathfrak{a}$ fortgeschafft worden und dies Verfahren des Abspaltens kann so lange fortgesetzt werden, bis die zu vertauschenden Summanden miteinander übereinstimmen. Denn ein jedes Zahlzeichen $\mathfrak{a}$ ist ja aus den Zeichen 1 und + in der vorhin erklärten Weise aufgebaut; es kann daher durch Abspalten und Auslöschen der einzelnen Zeichen auch wieder abgebaut werden. […]
>
> Wir haben eben konkrete Zeichen als Objekte, operieren mit diesen und machen über sie inhaltliche Aussagen. Und was insbesondere den soeben ausgeführten Beweis für $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ betrifft, so ist dieser Beweis, wie ich noch besonders hervorheben möchte, ebenso lediglich ein auf dem Auf- und Abbau der Zahlzeichen beruhendes Verfahren und seinem Wesen nach verschieden von demjenigen Prinzip, welches als Prinzip der vollständigen Induktion oder Schluß von n auf n + 1 in der höheren Arithmetik eine so hervorragende Rolle spielt. Letzteres Prinzip ist vielmehr, wie wir später erkennen werden, ein weitertragendes formales, einer höheren Stufe angehöriges Prinzip, das seinerseits eines Beweises bedürftig und fähig ist. [Hilbert 1922, S. 164f.]

8. Offenbar wird hier ein Verfahren angedeutet, nach dem für *gegebene* Zahlzeichen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Identität $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ festgestellt werden kann. Das bedeutet aber nicht, dass durch das Verfahren auch gezeigt worden sei, *für alle Zahlzeichen* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gelte $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

Diese Situation ähnelt derjenigen im Falle des formalen arithmetischen System Q, der sogenannten Robinson-Arithmetik aus [Tarski et al. 1953, S. 51], die ohne Induktionsaxiome oder Induktionsregeln definiert ist: Für Numerale[3] $\overline{m}$, $\overline{n}$ ist die Gleichung $\overline{m} + \overline{n} = \overline{n} + \overline{m}$ in Q ableitbar, nicht ableitbar ist in Q dagegen $x + y = y + x$ (bzw. der Allabschluss) für *Variablen* x, y.

Die Ähnlichkeit verdeutlicht die folgende Gegenüberstellung:

(i) Hilberts Finitismus:

- (α) Für Zahlzeichen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ schließt man mit „inhaltlicher Induktion" auf $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.
- (β) *Nicht:* mit „inhaltlicher Induktion" schlösse man, dass für alle Zahlzeichen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gelte, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

(ii) Robinson-Arithmetik Q (keine Induktion):

- (α) Für Numerale $\overline{m}$, $\overline{n}$: $\mathsf{Q} \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{n} + \overline{m}$
- (β) Für Variablen x, y: $\mathsf{Q} \nvdash x + y = y + x$ (ebenso mit $\forall x\ \forall y$ …).

[3] Wir schreiben „$\overline{n}$" für „1 + … + 1" mit n Vorkommnissen von „1".

9. Statt aber leichtfertig in einer solchen Weise eine formale Analyse der „inhaltlichen Induktion“ und überhaupt von Hilberts Metamathematik vorzunehmen, schieben wir schon bei dieser Gelegenheit folgendes *Caveat* ein: Hilberts Metamathematik der zwanziger Jahre sträubt sich in gewisser Weise gegen eine solche Analyse. In der Metamathematik wird „inhaltlich“, nicht „formal“ geschlossen. Dies ist ein grundsätzlicher Unterschied.

> Bei der solcherart betriebenen Zahlentheorie gibt es keine Axiome, und also sind auch keine Widersprüche möglich. [Hilbert 1922, S. 164]

Unsere Hinweise auf Ähnlichkeiten formaler Systeme mit Hilberts anschaulicher Mathematik bzw. Metamathematik sind daher nicht als formale Rekonstruktionen gedacht; wir lassen offen, ob formales und inhaltliches Schließen in irgendeiner Weise isomorph zueinander verlaufen.

10. Zurück zu Hilberts „inhaltlicher“ Feststellung von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$: Das von ihm angedeutete Verfahren wollen wir in diesem Rahmen *nicht* genau zu explizieren versuchen, sondern uns mit folgender formaler Analogie begnügen:

Angenommen, für ein Numeral $\overline{n}$ und eine Σ^0_0-Formel $\Phi(x)$ mit einziger freier Variable x sei $\Phi(\overline{n})$ zu zeigen. Dies kann nach folgender Anweisung geschehen: *Konstruiere eine absteigende Folge* $n_0 > \ldots > n_k$ mit $n_0 = n$,[4] *so dass die Formeln* $\Phi(\overline{n}_k)$ *und* $\Phi(\overline{n}_k) \rightarrow \Phi(\overline{n}_{k-1})$, ... , $\Phi(\overline{n}_1) \rightarrow \Phi(\overline{n}_0)$ *wahr sind* – sie sind dann finit bzw. in Q oder PRA ohne Induktionsregel ableitbar.[5] Der Beweis von $\Phi(\overline{n})$ benötigt dann noch k Anwendungen des *modus ponens* (da $\overline{n}_0$ und $\overline{n}$ dasselbe Numeral sind). Der Beweis kommt so tatsächlich ohne („formale“) vollständige Induktion aus. Anstelle der Prämisse $\forall x\, (\Phi(x) \rightarrow \Phi(x{+}1))$ oder $\forall x\, ((\forall y{<}x\, \Phi(y)) \rightarrow \Phi(x))$ der vollständigen Induktion treten (entgegen Tait) einzelne Einsetzungsfälle auf, vgl. [Niebergall/Schirn 1998, S. 280].

Die inhaltliche Induktion lässt sich als das Verfahren charakterisieren, Aussagen über endlich viele gegebene, aus Zeichen aufgebaute „Figuren“ durch Zurückführung auf Aussagen über Bestandteile dieser Figuren abzuleiten.

Das Verfahren gestattet allerdings nicht die Ableitung von $\Phi(x)$ bzw. $\forall x\, \Phi(x)$. Und damit bleibt als Problem, was ein finiter Beweis von

(i) $\forall x\, \Phi(x)$
(ii) $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x})$
(iii) „Kein Beweis des formalen Systems Σ hat eine widersprüchliche Endformel“

sein könnte.

---

[4] In Hilberts Beispiel wird nämlich auf einen Bestandteil „zurückgespielt“, der nicht notwendig um *genau* einen Strich kürzer als $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist.

[5] Die Formeln wären sogar aus der (jedenfalls prinzipiell) variablenfreien Arithmetik R aus [Tarski et al. 1953, S. 52f.] ableitbar.

11. Für die Übertragung der bisherigen Betrachtungen zur „anschaulichen“ Zahlentheorie auf das Beweisen von Konsistenzaussagen ist unsere vorige Behauptung problematisch, die „anschauliche“ inhaltliche Induktion, welche die eigentliche vollständige Induktion in Konsistenzbeweisen vermeiden und ersetzen soll, ermögliche keinen Beweis von $\Phi(x)$ oder $\forall x\, \Phi(x)$ bzw. entsprechenden informellen Aussagen. (Denn Konsistenzaussagen sind solche Allaussagen oder dazu äquivalent.) In der Literatur wird in gewissem Gegensatz zu dieser Behauptung beispielsweise diskutiert, worin ein finiter Beweis z. B. von $x + y = y + x$ bzw. dem Allabschluss davon bestehen könnte. Z. B. Tait [1981] zufolge *muss* es finite Beweise solcher Aussagen geben, weil *erstens* die finite Mathematik sonst trivial wäre und *zweitens* finite Konsistenzbeweise sonst analog von vornherein unmöglich wären.[6]

Des einen *modus ponens* ist bekanntlich des anderen *modus tollens*, und so neigen *wir* (mehr U. L. als C. T.) eher zu der Auffassung, dass die finite Mathematik eben doch im Taitschen Sinn trivial ist und finite Konsistenzbeweise von vornherein unmöglich sind. Einen weiteren Standpunkt scheint Hilbert zu vertreten: Die finite Mathematik ist im Taitschen Sinn trivial, aber finite Konsistenzbeweise sind möglich. Bei dieser Deutung gehen wir von der Annahme aus, dass inhaltliches, anschauliches und finites Schließen bei Hilbert dasselbe sind. Zur finiten Mathematik sagt Hilbert demnach – kurz nach der zuletzt zitierten Passage:

> Sicherlich können wir durch diese anschauliche inhaltliche Art der Behandlung, wie wir sie geschildert und angewandt haben, in der Zahlentheorie noch erheblich weiter vorwärtskommen. Aber freilich läßt sich nicht die ganze Mathematik auf solche Art erfassen. Schon beim Übertritt zum Standpunkt der höheren Arithmetik und Algebra, z. B. wenn wir Behauptungen über unendlichviele Zahlen oder Funktionen gewinnen wollen, versagt jenes inhaltliche Verfahren. [Hilbert 1922, S. 164f.]

Ein Rätsel bleibt uns (wie wohl auch Tait [2002, S. 411]) dabei, wie dann ein inhaltliches Verfahren einen Beweis für eine Konsistenzaussage liefern kann, deren Zutreffen ja von den Endformeln unendlich vieler formaler Beweise abhängt.

12. Demgegenüber gibt es in der Literatur Vorschläge dazu, worin finite Beweise z. B. von $x + y = y + x$ oder von Konsistenzaussagen bestehen könnten. Gemeinsam ist diesen Vorschlägen ungefähr Folgendes: Sei $\Phi(x)$ wieder eine Σ^0_0-Formel mit einziger freier Variable x. Ein finiter Beweis von $\forall x\, \Phi(x)$ ist dann eine Vorschrift, um zu jedem Numeral $\overline{n}$ einen finiten Beweis von $\Phi(\overline{n})$ zu konstruieren. Also:

$\mathfrak{B}$ ist finiter Beweis von $\forall x\, \Phi(x) \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$
$\mathfrak{B}$ erzeugt zu jedem Numeral $\overline{n}$ einen finiten Beweis von $\Phi(\overline{n})$.

[6] Diese Deutung von [Tait 1981] ist in dramaturgischer Absicht etwas überspitzt. Tait [1981] äußert sich eigentlich *nicht* zur (Nicht-)Trivialität der finiten (Meta-)Mathematik, sondern er schlägt eine Deutung vor, die die Schlussfolgerung der Trivialität vermeidet.

Der Begriff eines finiten Beweises der variablenfreien Formel $\Phi(\overline{n})$ ist dabei vergleichsweise unproblematisch.[7] Vorbilder für diese Explikation finden sich z. B. bei Herbrand [1932, Fn. 3][8], Detlefsen [1979, Section 8], Tait [1981], Ignjatović [1994, S. 324ff.], Niebergall/Schirn [1998, S. 298ff.: Beweisen „approximativer Konsistenz“].

13. Der Nachteil dieser Explikation besteht (im Wesentlichen nach Ignjatović [1994, S. 328]) darin, dass ein finiter Beweis danach zu einem Beweis im üblichen Sinne, der auch gewöhnliche Mathematiker überzeugt, nichts beiträgt. Zur Verdeutlichung stelle man sich vor, die Goldbachsche Vermutung sei wahr.[9] Dann gibt es einen leicht anzugebenden „finiten Beweis“ der Goldbachschen Vermutung im erklärten Sinne. Von einem *mathematischen* Beweis der Goldbachschen Vermutung im üblichen Sinne wären wir dann ebensoweit entfernt, wie wir es heute immer noch sind. Zu einem solchen fehlt in der Situation von $\Phi(x)$ etwa noch ein Beweis (im üblichen Sinne), dass der für $\Phi(\overline{n})$ konstruierte Beweis tatsächlich für jedes Numeral $\overline{n}$ korrekt ist. Ein solcher Beweis kann typischerweise unter Verwendung der eigentlichen vollständigen Induktion geführt werden, anders kaum.

Eine weitere Ironie ergibt sich aus Ackermanns anfangs zitierter Aussage, die Metamathematik benutze „nur solche primitive und endliche Schlussweisen, wie sie auch von den hartnäckigsten Skeptikern zugestanden werden“. Die Auffassung eines finiten Beweises wie oben als *echten* Beweises würde eine ω-Regel rechtfertigen (wie Hilbert [1931a: S. 491, 1931b: S. 121] sie tatsächlich als angeblich finit vorstellte, vgl. Detlefsen [1979, Section 8]). Eine solche ω-Regel wird jedoch kaum von den „hartnäckigsten Skeptikern“ zugestanden werden.

---

7 Wir unterstellen hier, dass jede wahre Σ^0_0-Formel einen Beweis in Q bzw. PRA ohne vollständige Induktion (noch besser: in der variablenfreien Arithmetik R aus [Tarski et al. 1953, S. 52f.]) hat, der sich in einen Beweis mit ausschließlich finiten Mitteln übersetzen lässt.

8 Nach van Heijenoort [1967, S. 618] fasst Herbrand Hilberts Metamathematik als intuitionistisch auf. Insofern liefert die folgende Anmerkung Herbrands eine außerordentlich klare Bestimmung der in dieser Metamathematik zulässigen Schlussweisen:

> „Wir verstehen unter einer intuitionistischen Schlussweise eine Schlussweise, die folgenden Bedingungen genügt: Man betrachtet darin niemals etwas anderes als eine bestimmte endliche Zahl von Objekten und Funktionen; diese sind wohldefiniert, ihre Definition erlaubt, in eindeutiger Weise ihren Wert auszurechnen; man behauptet niemals die Existenz eines Objekts, ohne das Mittel anzugeben, es zu konstruieren; man betrachtet niemals die Menge aller x einer unendlichen Reihe; und wenn man sagt, eine Schlussweise (oder ein Satz) sei wahr für alle diese x, bedeutet das, dass für jedes einzeln genommene x es möglich ist, die fragliche allgemeine Schlussweise zu wiederholen, die nicht anders als als Prototyp dieser einzelnen Schlussweisen anzusehen ist.“ [Herbrand 1932, Fn. 3, unsere Übers.]

9 Die bisher unbewiesene Goldbachsche Vermutung besagt, dass jede gerade natürliche Zahl größer als zwei sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt.

14. Wir übertragen diese Situation aus der Arithmetik in die Beweistheorie. Wir finden zwei „Lesarten", Deutungen von Konsistenzbeweisen aus Hilberts Schule, die uns in ein Dilemma führen:

(i) (α) *Prima-facie*-Induktionen sind vollständige Induktionen.
(β) Das Beispiel ist Beweis im üblichen Sinne.
(ii) (α) *Prima-facie*-Induktionen sind „inhaltliche" Induktionen.
(β) Das Beispiel ist kein Beweis im üblichen Sinne.

Ad (i): Liest man die Beweise als gewöhnlicher Mathematiker und lässt den finitistischen Anspruch beiseite, so findet man (von eventuellen Irrtümern anderer Art abgesehen)[10] akzeptable Konsistenzbeweise, die allerdings die vollständige Induktion verwenden.

Ad (ii): Beachtet man den finitistischen Anspruch, vollständige Induktion durch inhaltliche Induktion zu ersetzen, so kann man die *prima-facie*-Induktionen in die Angabe eines Verfahrens umdeuten, das für jeden formalen Beweis $\mathfrak{B}$ eine Feststellung erzeugt, dass die Endformel von $\mathfrak{B}$ nicht widersprüchlich ist. Diese Feststellung führt über Analysen von Bestandteilen von $\mathfrak{B}$, so dass *prima-facie*-Induktionen inhaltliche Induktionen sind. So ist jedoch kein Beweis im üblichen Sinne ersichtlich.

15. Ironischerweise ist das unter (ii) für einen formalen Beweis $\mathfrak{B}$ beschriebene Verfahren, um auf dessen Endformel zu schließen, außerordentlich umständlich. Ein wesentlich einfacheres Verfahren zur Feststellung, dass $\mathfrak{B}$ keine widersprüchliche Endformel hat, folgt im Wesentlichen der Regel „*Schau auf die Endformel!*" Die Endformel wäre der einzige Bestandteil von $\mathfrak{B}$, der für einen finiten Konsistenzbeweis von Bedeutung wäre. (Allerdings wird an irgendeiner Stelle auch geprüft werden müssen, ob eine „Figur" ein korrekter formaler Beweis ist; hierfür kommt es auf „alle" Bestandteile an.)

Diese Trivialisierung des vorgeschlagenen Verständnisses finiter Konsistenzbeweise deutet darauf hin, dass ihre Schöpfer eben doch gewöhnliche Mathematiker überzeugende Konsistenzbeweise im Sinn hatten. Die Umdeutung (ii) scheint eher eine nachträgliche Täuschung bzw. Selbsttäuschung zu sein, deren Vater der Wunsch war, gegenüber Kritikern recht zu behalten. Versteht man den Konsistenzbeweis aber nur als Verfahren, Betrachtungen einzelner formaler Beweise zu erzeugen, so verliert er seine Beweiskraft. (Weyl [1928, S. 22] scheint darauf hinzuweisen beabsichtigt zu haben.)

16. Falls die Auffassung, Konsistenzaussagen könnten finit mit nur „inhaltlicher" Induktion bewiesen werden, wie eben gemutmaßt, auf einer Täuschung beruht, so könnte diese vielleicht folgendermaßen Verständnis finden:

[10] Tatsächlich gibt die Literatur spätestens ab 1936 einhellig an, dass die Argumentation von Ackermanns Dissertation nicht zum Beweis der Konsistenz der Peano-Arithmetik genügt, vgl. [Gentzen 1936, Fn. 4] – offenbar im Gegensatz zu der in der Dissertation vertretenen Auffassung.

Das Phänomen der ω-Unvollständigkeit ebenso wie die formale Analyse der Metamathematik wurde erst durch Gödel bekannt und geläufig. Fefermans Erläuterungen zu Gödels 1931er Besprechung von [Hilbert 1931a; Gödel 1986, S. 208–210] deuten darauf hin, dass die Vorstellung der Unvollständigkeit bzw. ω-Unvollständigkeit formaler Systeme bzw. von ihnen reflektierter informeller Beweismittel Hilbert bis 1930 fremd (oder jedenfalls für ihn „gewöhnungsbedürftig") war. Dementsprechend mag er einen finiten Beweis im vorgeschlagenen Sinne als Konstruktionsverfahren für die Einzelfälle tatsächlich für einen überzeugenden Beweis im üblichen Sinne gehalten haben.[11]

Literatur

[Ackermann 1925] Ackermann, W.: „Begründung des ‚Tertium non datur' mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit", in: *Mathematische Annalen* 93, 1–36. (Eingegangen am 30.3.1924.)

[Ackermann an Bernays 1936] Brief von W. Ackermann an P. Bernays vom 5. Dezember 1936, Bernays-Nachlass, ETH Zürich; zitiert aus [Zach 2003], Anm. 44.

[Ackermann an Bernays 1938] Brief von W. Ackermann an P. Bernays vom 29. Juni 1938, Bernays-Nachlass, ETH Zürich; zitiert aus [Zach 2003], Anm. 45.

[Detlefsen 1979] Detlefsen, M.: „On Interpreting Gödel's Second Theorem", in: *Journal of Philosophical Logic* 8, 297–313.

[Drago 1996] Drago, A.: „Poincaré versus Peano and Hilbert about the Mathematical Principle of Induction", in: J.-L. Greffe, G. Heinzmann, K. Lorenz (Hrsg.): *Henri Poincaré, science et philosophie, congrès international, Nancy, France, 1994*, Berlin: Akademie Verlag / Paris: A. Blanchard, 513–527.

[Gentzen 1936] Gentzen, G.: „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", in: *Mathematische Annalen* 112, 493–565.

[Gödel 1986] Gödel, K.: *Collected Works* Volume I. Publications 1929–1936, S. Feferman et al. (Hrsg.), Oxford: Oxford University Press/Clarendon Press**.**

[Herbrand 1932] Herbrand, J.: „Sur la non-contradiction de l'Arithmétique", in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 166, 1–8; eine *englische Übersetzung* (mit derselben Nummerierung der Fußnoten) findet sich in: [van Heijenoort 1967], 620–628.

[Hilbert 1905] Hilbert, D.: „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", in: A. Krazer (Hrsg.): *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig: Teubner, 174–185.

[11] Mit Blick auf die ω-Regel lässt sich nicht ohne weiteres behaupten, Gödel habe die angebliche Vermeidbarkeit vollständiger Induktion in Hilbertschen Konsistenzbeweisen widerlegt (eine Auffassung, die wahrscheinlich Drago [1996, S. 514] teilt). Dank ω-Regel könnte die finite Metamathematik Π_1^0-vollständig und damit nicht rekursiv aufzählbar sein. Damit wäre Gödels zweites Theorem gar nicht anwendbar.

[Hilbert 1922] —: „Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung“, in: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1 (Vortrag in Hamburg, Frühjahr 1922); mit Anmerkungen von P. Bernays wieder abgedruckt in [Hilbert 1935], 157–177 – danach Seitenangaben.

[Hilbert 1923] —: „Die logischen Grundlagen der Mathematik“, in: *Mathematische Annalen* 88, 151–165. (Vortrag vor Deutscher Naturforscher-Gesellschaft, September 1922, bei der Zeitschrift eingegangen am 29.9.1922.)

[Hilbert Empfehlungsschreiben] Empfehlungsschreiben von D. Hilbert für W. Ackermann, undatiert, offenbar 1924, Hilbert-Nachlass, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen; zitiert aus [Zach 2003], Anm. 33.

[Hilbert 1928] —: „Die Grundlagen der Mathematik“, in: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, 1–21. (Vortrag in Hamburg, Juli 1927.)

[Hilbert 1931a] —: „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“, in: *Mathematische Annalen* 104, 485–494.

[Hilbert 1931b] —: „Beweis des Tertium non datur“, in: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Philosophische Klasse*), 120–125.

[Hilbert 1935] —: *Gesammelte Abhandlungen* Band 3. Berlin: Springer.

[Ignjatović 1994] Ignjatović, A.: „Hilbert’s Program and the Omega-Rule“, in: *The Journal of Symbolic Logic* 59, 322–343.

[Niebergall/Schirn 1998] Niebergall, K.-G., und M. Schirn: „Hilbert’s Finitism and the Notion of Infinity“, in: M. Schirn (Hrsg.): *The Philosophy of Mathematics Today*. Oxford: Clarendon Press.

[Skolem 1923] Skolem, T.: „Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre“, in: *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem 5. Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922*, Helsingfors: Akademische Buchhandlung; zitiert aus [Skolem 1970], 137–152.

[Skolem 1930] —: „Über die Grundlagendiskussion in der Mathematik“, in: *Comptes rendus du septième congrès des mathématiciens scandinaves tenu à Oslo 19-22 août 1929*, Oslo: Brøggers; zitiert aus [Skolem 1970], 207–225.

[Skolem 1970] —: *Selected Works in Logic* (Hrsg. J. E. Fenstad). Oslo: Universitetsforlaget.

[Tait 1981]: Tait, W. W.: „Finitism“, in: *Journal of Philosophy* 78, 524–546.

[Tait 2002] —: „Remarks on Finitism“, in: W. Sieg, R. Sommer, C. Talcott (Hrsg.): *Reflections on the Foundations of Mathematics. Essays in Honor of Solomon Feferman* (Lecture Notes in Logic 15). Natick, MA: Association for Symbolic Logic/A K Peters, 410–419.

[Tarski et al. 1953] Tarski, A., A. Mostowski, und R. M. Robinson: *Undecidable Theories*. Amsterdam: North-Holland.

[van Heijenoort 1967] van Heijenoort, J. (Hrsg.): *From Frege to Gödel*. Cambridge, MA: Harvard University Press 1967.

[Weyl 1928] Weyl, H.: „Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik", in: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, 22–24.

[Zach 2003] Zach, R.: „The Practice of Finitism: Epsilon Calculus and Consistency Proofs in Hilbert's Program", in: *Synthese* 137, 211–259.