[8] Helga-Maria Kühn. „In diesem ruhigen Kleinleben geht so schrecklich viel vor“. Rebecka Lejeune Dirichlet, geb. Mendelsohn Bartholdy, in Göttingen 1855-1858. *Mendelsohn- Studien*, 11:145-156, 1999.

[9] Hans Küntzel. *„Aber Fesseln tragen kann ich nicht“. Johannes Brahms und Agathe von Siebold.* Steidl, 2003.

[10] Hans-Christoph Mauruschat. Der Komponist Hans Sommer (1837-1922) und seine Musikbibliothek. *Die Musikforschung*, 61:252-254, 2008.

[11] Friedrich Merkel. *Jacob Henle. Ein deutsches Gelehrtenleben. Nach Aufzeichnungen und Erinnerungen.* Vieweg, 1891.

[12] Oscar Paul. Das Musikfest in Braunschweig am 10., 11. und 12. Juni 1865. *Niederrheinische Musik-Zeitung*, 13:198f., 212f., 1865.

[13] Lynda Lloyd Rees. Müller. In *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, volume 12, page 767.

[14] Winfried Scharlau. Aus Briefen Richard Dedekinds an seine Familie. In *Richard Dedekind 1831-1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, S. 27-58. Vieweg und Teubner, 1981.

[15] Katrin Scheel. *Der Briefwechsel Richard Dedekind-Heinrich Weber*, Band 5 der *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Hamburg.* DeGruyter, 2014.

[16] Hans Zincke (Sommer). Erinnerungen an Richard Dedekind. *Braunschweigisches Magazin*, 22:73-81, 1916.

[17] Hans Zincke (Sommer). Vom alten „Verein für Conzert-Musik (1863-1870). *Braunschweigisches Magazin*, 24:1-7, 1918.

In: In Memoriam Richard Dedekind (1831-1916). Number Theory - Algebra - Set Theory - History - Philosophy. Hg. Scheel/Sonar/Ullrich, Münster: WTM 2017, 205-211.

Richard Dedekind: Brief an Keferstein

Christian Tapp (Hrsg.)
Institut für Christliche Philosophie
Universität Innsbruck

1 Einleitung des Herausgebers

Dieser Beitrag enthält eine textkritische Edition des Briefes von Richard Dedekind an seinen Kritiker H. Keferstein vom 27. Februar 1890. Dieser Brief gewährt wichtige sachlich-systematische Erklärungen und Einsichten zu Dedekinds Werk *Was sind und was sollen die Zahlen?*,[1] sowie einen Einblick in dessen Genese.
In einem Band der *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg* hatte der Hamburger Oberlehrer Hans Keferstein[2] einen Artikel *über den Begriff der Zahl* [5] veröffentlicht, in dem er auf Freges *Grundlagen der Arithmetik* [3] und Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen?* [1] Bezug nahm. Aufgrund von Missverständnissen des Autors sah sich Dedekind genötigt, eine Replik zu schreiben. Auch wenn die Replik letztlich nicht gedruckt wurde, verdanken wir der kurzen Korrespondenz, die sich zwischen Dedekind und Keferstein entspann, den im Folgenden wiedergegeben Brief.[3]
Das Original des Briefes, genauer: ein sauberer Entwurf oder eine Abschrift in Dedekinds Handschrift, befindet sich Dedekinds Nachlass, der in der Universitätbibliothek Göttingen aufbewahrt wird.[4] Der Text wurde auf Deutsch zuerst von M.-A. Sinaceur in [7] veröffentlicht. Die hier gegebene Edition basiert auf der von Sinaceur, wobei allerdings einige Ungenauigkeiten korrigiert wurden.

[1]Siehe z. B. [4] in diesem Heft, sowie [6]. — Ich danke Reinhard Kahle für die Mitarbeit an der vorliegenden Publikation.

[2]Der Artikel ist mit „H. Keferstein“ unterzeichnet; das Mitgliederverzeichnis des vorhergehenden Bandes nennt „Joh. Keferstein“, woraus sich der Vorname „Johannes = Hans“ erschließen lässt.

[3]Mehr zur Korrespondenz zwischen Dedekind und Keferstein findet sich in der Einleitung zur englischen Übersetzung in van Heijenoorts Sammlung *From Frege to Gödel* [2], auf die wir uns auch bei den hier gegebenen Informationen stützen.

[4]Signatur: Cod. Ms. R. Dedekind 13:19, vgl. **hans.sub.uni-goettingen.de/nachlaesse/Dedekind.pdf**, abgerufen Januar 2017.

Die Edition ist wie folgt konzipiert: Abkürzungen werden in eckigen Klammern ausgeführt (Abk[ürzung]). Textkritische Varianten (d. h. die wesentlichen Unterschiede zur Ausgabe [7] [=$\mathfrak{S}$]) werden mit Bezug auf die Zeilennummern in einem $\mathfrak{S}$ kritischen Apparat am Fuß der Seite angegeben. Dedekinds alte deutsche Orthographie wurde beibehalten, um dem Leser einen „ursprünglichen Eindruck“ von Dedekinds Schreibstil zu vermitteln. Zum Beispiel schreibt er stets „ß“ statt „ss“, benutzt in Wörtern lateinischen Ursprungs „c“ statt „k“ und hält an der alten Schreibung mancher Wörter mit „th“ statt „t“ fest (z. B. „Thal“ statt „Tal“).

2 Edition

1890. 2. 27. Herrn Oberlehrer Dr. H. Keferstein. Hamburg

Hochgeehrter Herr Doctor!

Für Ihren freundlichen Brief vom 14. d[ieses] M[onats] und die darin ausgesprochene Bereitwilligkeit, meiner Entgegnung Gehör zu verschaffen, sage ich Ihnen meinen besten Dank. Doch möchte ich Sie bitten, in dieser Angelegenheit Nichts zu übereilen und erst dann einen Entschluß zu faßen, nachdem Sie, wenn Sie Zeit dazu haben, die wichtigsten Erklärungen und Beweise in meiner Zahlenschrift noch einmal genau gelesen und durchdacht haben. Ich halte es nämlich für höchst wahrscheinlich, daß Sie sich dann in allen Puncten zu meiner Auffaßung und Behandlung des Gegenstandes bekehren werden, und gerade hierauf würde ich bei weitem den größten Werth legen, weil ich überzeugt bin, daß Sie wirklich ein tiefes Intereße für die Sache hegen.

Um diese Annäherung wo möglich zu befördern, möchte ich Sie bitten, dem folgenden Gedankengange, der die Genesis meiner Schrift darstellt, Ihre Aufmerksamkeit zu schenken. Wie ist meine Schrift entstanden? Gewiß nicht in einem Tage, sondern sie ist eine nach langer Arbeit aufgebaute Synthese, die sich auf eine | vorausgehende Analyse der Reihe der natürlichen Zahlen stützt, so wie diese sich, gewißermaßen erfahrungsmäßig, unserer Betrachtung darbietet. Welches sind die von einander unabhängigen Grundeigenschaften dieser Reihe $\mathcal{N}$, d. h. diejenigen Eigenschaften, welche sich nicht aus

4 freundlichen] $\mathfrak{S}$: freudlichen
8 Zeit] $\mathfrak{S}$: die Zeit
11 Auffaßung] $\mathfrak{S}$: Anfassung
18 Tage]$\mathfrak{S}$: Zuge

einander ableiten laßen, aus denen aber alle anderen folgen? Und wie muß man diese Eigenschaften ihres spezifisch arithmetischen Charakters entkleiden, der Art, daß sie sich allgemeineren Begriffen und solchen Tätigkeiten des Verstandes unterordnen, *ohne* welche überhaupt kein Denken möglich ist, *mit* welchen aber auch die Grundlage gegeben ist für die Sicherheit und Vollständigkeit der Beweise, wie für die Bildung widerspruchsfreier Begriffserklärungen?

Stellt man die Frage in dieser Weise, so wird man, wie ich glaube, mit Gewalt auf folgende Thatsachen gedrängt:

1) Die Zahlenreihe $\mathcal{N}$ ist ein *System* von Individuen oder Elementen, die Zahlen heißen. Dies führt zur allge | meinen Betrachtung von Systemen überhaupt (§. 1 meiner Schrift).

2) Die Elemente des Systems $\mathcal{N}$ stehen in gewißer Beziehung zu einander, es herrscht eine gewiße Ordnung, die zunächst darin besteht, daß zu jeder bestimmten Zahl n eine bestimmte Zahl n', die folgende oder nächst größere Zahl *gehört*. Dies führt zur Betrachtung des allgemeinen Begriffs einer *Abbildung* ϕ eines Systems (§. 2), und da das Bild $\phi(n)$ einer jeden Zahl n wieder eine *Zahl* n' also $\phi(\mathcal{N})$ Theil von $\mathcal{N}$ ist, so handelt es sich hier um die Abbildung ϕ eines Systems $\mathcal{N}$ *in sich selbst*, welche also allgemein zu untersuchen ist (§. 4).

3) Auf verschiedene Zahlen a, b folgen auch verschiedene Zahlen a', b'; die Abbildung ϕ hat also den Charakter der Deutlichkeit oder *Ähnlichkeit* (§. 3).

4) Nicht jede Zahl ist eine folgende Zahl n', d. h. $\phi(\mathcal{N})$ ist echter Theil von $\mathcal{N}$, und hierin besteht (in Verbindung mit dem Vorhergehenden) die *Unendlichkeit* der Zahlenreihe $\mathcal{N}$ (§. 5).

5) Und zwar ist die Zahl 1 die *einzige* Zahl, welche sich nicht in $\phi(\mathcal{N})$ findet. Hiermit sind | diejenigen Thatsachen aufgezählt, in welchen Sie (S. 124, Z. 8–14) den vollständigen Charakter eines geordneten einfach unendlichen Systems $\mathcal{N}$ erblicken.

6) Aber ich habe in meiner Entgegnung (III) gezeigt, daß diese Thatsachen noch lange nicht ausreichen, um das Wesen der Zahlenreihe $\mathcal{N}$ vollständig

1 aus einander] $\mathfrak{S}$: auseinander
1 folgen?] $\mathfrak{S}$: folgen.
2 ihres spezifisch arithmetischen] $\mathfrak{S}$: Ihres spezifischarithmetischen
3 allgemeineren] $\mathfrak{S}$: allgemeinen
11 Zahlen] $\mathfrak{S}$: „Zahlen“
13 zu einander] $\mathfrak{S}$: zueinander
16 Dies] $\mathfrak{S}$: Dieses
18 *Zahl*] $\mathfrak{S}$: Zahl
22 hat] $\mathfrak{S}$: *hat*

zu erfaßen. Alle diese Thatsachen würden auch noch für jedes System $\mathcal{S}$ gelten, welches außer der Zahlenreihe $\mathcal{N}$ noch ein System $\mathcal{T}$ von beliebigen anderen Elementen t enthält, auf welches die Abbildung ϕ sich stets so ausdehnen läßt, daß sie den Charakter der Ähnlichkeit behält, und daß $\phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ wird. Aber ein solches System $\mathcal{S}$ ist offenbar etwas ganz Anderes, als unsere Zahlenreihe $\mathcal{N}$, und ich könnte es so wählen, daß in ihm kaum ein einziger der arithmetischen Sätze bestehen bliebe. Was muß also zu den bisherigen Thatsachen noch hinzu kommen um unser System $\mathcal{S}$ von solchen fremden, alle Ordnung störenden Eindringlingen t wieder zu reinigen und auf $\mathcal{N}$ zu beschränken? Dies war einer der schwierigsten Puncte meiner Analyse, und seine Überwindung hat ein langes Nachdenken erfordert. Setzt man die Kenntniß der natürlichen Zahlenreihe $\mathcal{N}$ schon voraus und | erlaubt sich demgemäß eine arithmetische Ausdrucksweise, so hat man ja leichtes Spiel; man braucht nur zu sagen: ein Element n gehört dann und nur dann der Reihe $\mathcal{N}$ an, wenn ich, von dem Element 1 ausgehend, durch beständig wiederholtes Weiterzählen, d. h. durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen der Abbildung ϕ (vergl. den Schluß von 131 meiner Schrift) wirklich einmal zu dem Element n gelange, während ich auf diese Weise niemals zu einem der Reihe $\mathcal{N}$ fremden Element t gelange. Aber dieser Weg, den Unterschied zwischen den aus $\mathcal{S}$ wieder auszutreibenden Elementen t und den allein bei zu behaltenden Elementen n zu charakterisiren, ist doch für unseren Zweck gänzlich unbrauchbar, er enthielte ja einen *circulus vitiosus* der schlimmsten und auffälligsten Art. Die bloßen Worte „endlich einmal hinkommen“ tun es auch natürlich nicht, sie würden nicht mehr helfen als etwa die Worte *„Karam sipo tatura“*, die ich augenblicklich erfinde, ohne ihnen einen deutlich erklärten Sinn zu geben. Also: wie kann ich, ohne irgend welche arithmetische Kenntniß vorauszusetzen, den Unterschied zwischen | den Elementen n und t unfehlbar begrifflich bestimmen? Ganz allein durch die Betrachtung der *Ketten* (37, 44 meiner Schrift), durch diese aber auch vollständig! Will ich meinen Kunstausdruck „Kette“ vermeiden, so werde ich sagen: ein Element n von $\mathcal{S}$ gehört dann und nur dann der Reihe $\mathcal{N}$ an, wenn n Element *jedes solchen* Theils $\mathcal{K}$ von $\mathcal{S}$ ist, welcher die

1 erfaßen. Alle] $\mathfrak{S}$: erfassen; Alle
3 welches] $\mathfrak{S}$: welche
10 beschränken?] $\mathfrak{S}$: beschränken.
10 Dies] $\mathfrak{S}$: Dieses
16 endliche] $\mathfrak{S}$: unendliche
22-23 *vitiosus*]$\mathfrak{S}$: viciosus
27 Kenntniß] $\mathfrak{S}$: Erkenntnis
32 welcher] $\mathfrak{S}$: welches

doppelte Eigenschaft besitzt, daß das Element 1 in $\mathcal{K}$ enthalten ist, und daß das Bild $\phi(\mathcal{K})$ Theil von $\mathcal{K}$ ist. Zu meiner Kunstsprache: $\mathcal{N}$ ist die Gemeinheit 1_0 oder $\phi_0(1)$ aller derjenigen Ketten $\mathcal{K}$ (in $\mathcal{S}$), in denen das Element 1 enthalten ist. Erst hierdurch ist der vollständige Charakter der Reihe $\mathcal{N}$ festgestellt. — Hierzu bemerke ich beiläufig Folgendes. Die „Begriffsschrift“ und die „Grundlagen der Arithmetik“ von Frege sind zum ersten Male im letzten Sommer (1889) auf kurze Zeit in meine Hände gelangt, und ich habe mit Vergnügen gesehen, daß seine Art, das mittelbare Folgen eines Elementes auf ein anderes in einer Reihe zu erklären, im *Wesentlichen* mit meinen Kettenbegriffen (37, 44) übereinstimmt; man muß sich nur durch seine etwas unbequeme Ausdrucksweise nicht zurückschrecken laßen. — |

7) Nachdem in meiner Analyse der wesentliche Charakter des einfach unendlichen Systems, deßen abstracter Typus die Zahlenreihe $\mathcal{N}$ ist, erkannt war (71, 73), fragte es sich: *existirt* überhaupt ein solches System in unserer Gedankenwelt? Ohne den logischen Existenz-Beweis würde es immer zweifelhaft bleiben, ob nicht der Begriff eines solchen Systems vielleicht innere Widersprüche enthält. Daher die Nothwendigkeit solcher Beweise (66, 72 meiner Schrift).

8) Nachdem auch dies festgestellt war, fragte es sich: liegt in dem Bisherigen auch eine ausreichende *Beweismethode*, um Sätze, die für *alle* Zahlen n gelten sollen, allgemein zu beweisen? Ja! Der berühmte Induktions-Beweis ruht auf der sicheren Grundlage des Ketten-Begriffs (59, 60, 80 meiner Schrift).

9) Endlich: ist es auch möglich, die *Definitionen* für Zahlen-Operationen widerspruchsfrei für *alle* Zahlen n aufzustellen? Ja! Dies wird durch den Satz 126 meiner Schrift in der That geleistet. —

Damit war die Analyse beendigt, und der synthetische Aufbau konnte beginnen; er hat mir doch noch Mühe genug gemacht! Auch der | Leser meiner Schrift hat es wahrlich nicht leicht; außer dem gesunden Menschenverstande gehört auch noch ein sehr starker Wille dazu, um Alles vollständig durchzuarbeiten.

Ich wende mich nun noch zu einigen Stellen Ihrer Abhandlung, die ich in

3 in denen] $\mathfrak{S}$: indem
15 Existenz-Beweis] $\mathfrak{S}$: Existenzbeweis
20 *Beweismethode*] $\mathfrak{S}$: Beweismethode
21 Induktions-Beweis] $\mathfrak{S}$: Induktionsbeweis
22 der] $\mathfrak{S}$: dieser
22 Ketten-Begriffs] $\mathfrak{S}$: Kettenbegriffes
23 Zahlen-Operationen] $\mathfrak{S}$: Zahlen Operationen
27 er] $\mathfrak{S}$: es
31 wende] $\mathfrak{S}$: werde
31 in] $\mathfrak{S}$: im

meiner neulichen Entgegnung nicht erwähnt habe, weil sie weniger wichtig sind; vielleicht werden aber meine darauf bezüglichen Bemerkungen noch Einiges zur Klärung der Sache beitragen.

a) S. 121, Z. 19. Weshalb wird hier von einem *Theile* gesprochen? Eine *Anzahl* schreibe ich später (161 meiner Schrift) jedem *endlichen* Systeme und nur einem solchen zu.

b) S. 122, Z. 8. Hier findet sich eine Verwechselung zwischen *Abbildung* und *Bild*; statt „Abbildung $\overline{\phi}(\mathcal{S}')$“, müßte es heißen „Abbildung $\overline{\phi}$ des Systems $\mathcal{S}'$“. Nicht $\overline{\phi}(\mathcal{S}')$, sondern $\overline{\phi}$ ist eine *Abbildung* (der abbildende Maler), die aus dem *System* (Original) $\mathcal{S}'$ das *Bild* $\overline{\phi}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$ erzeugt. Solche Verwechselungen können aber bei unserer Untersuchung recht gefährlich werden.|

c) S. 123, Z. 1–2. Diese Worte mögen vielleicht auf Frege paßen, auf mich gewiß nicht. Die *Zahl* 1 als Grundelement der Zahlenreihe wird von mir mit vollkommener Bestimmtheit erklärt in 71, 73, und die *Anzahl* 1 ergibt sich ebenso im Satze 164 als Folge der allgemeinen Erklärung 161. Hierzu *darf* gar nichts weiter hinzugefügt werden, wenn nicht eine Trübung eintreten soll.

d) S. 123, Z. 29–31. Dies ist schon durch die vorhergehende Bemerkung c) erledigt. Und wie würde wohl die größere Sicherheit und die geringere Weitläufigkeit sich *thatsächlich* gestalten?

e) S. 124, Z. 21–24. Der Sinn dieser Zeilen (sowie der vorhergehenden und folgenden) ist mir nicht ganz deutlich. Soll hier etwa der Wunsch ausgesprochen sein, meine Definition der Zahlenreihe $\mathcal{N}$ und der Aufeinanderfolge des Elementes n' auf das Element n womöglich anzulehnen an eine *anschauliche* Reihe? Dem würde ich mich mit größter Bestimmtheit widersetzen, weil sofort die Gefahr entsteht, aus einer solchen Anschauung vielleicht unbewußt auch Sätze als selbstverständlich zu entnehmen, die vielmehr ganz abstract aus der logischen Definition von $\mathcal{N}$ abgeleitet werden müßen. Wenn ich n' das auf n *folgende* Element *nenne* (73), so soll das lediglich ein | neuer *Kunstausdruck* sein, durch deßen Benutzung ich nur einige Abwechselung in meine *Sprache* bringe; diese Sprache würde noch einförmiger und abschreckender klingen, wenn ich auf diese Abwechselung verzichten und n' immer nur das *Bild* $\phi(n)$ von n nennen müßte. Aber der eine Ausdruck soll genau daßelbe *bedeuten* wie der andere.

f) S. 124, Z. 33 – S. 125, Z. 7. Das in der dritten Zeile meiner Erklärung 73 gewählte Wort „lediglich“ soll doch offenbar die einzige *Einschränkung*

10 *Bild*] 𝔖: Bild
35 Das] 𝔖: das
35 der dritten Zeile] 𝔖: dem dritten Teile

bezeichnen, welcher das unmittelbar vorhergehende Wort „gänzlich“ zu unterwerfen ist; ließe man diese Einschränkung fallen, nähme also das Wort „gänzlich“ in seinem *vollen* Sinne, so würde auch die Unterscheidbarkeit der Elemente wegfallen, welche doch für den Begriff des einfach unendlichen Systems unentbehrlich ist. Mir scheint daher dieses „lediglich“ durchaus nicht überflüßig, sondern nothwendig zu sein. Ich verstehe nicht, wie dies einen Anstoß erregen kann. —
Indem ich meinen zu Anfang geäußerten Wunsch wiederhole und Sie bitte, die Ausführlichkeit meiner Erörterungen entschuldigen zu wollen, verbleibe ich mit größter Hochachtung

Braunschweig,
27. Februar 1890.
Petrithorpromenade 24.

Ihr
ergebenster
R. Dedekind.

References

[1] Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig, 1888.

[2] Richard Dedekind. Letter to Keferstein. In Jean van Heijenoort, editor, *From Frege to Gödel*, pages 98-103. Harvard University Press, 1967.

[3] Gottlob Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau, 1884.

[4] Reinhard Kahle. Von Dedekind zu Zermelo versus Peano zu Gödel. 2017. Dieser Band.

[5] Hans Keferstein. Über den Begriff der Zahl. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, 2:119-125, 1890.

[6] Wilfried Sieg and Dirk Schlimm. Dedekind's analysis of number: Systems and axioms. *Synthese*, 147:121-170, 2005.

[7] M.-A. Sinaceur. L'infini et les nombres. Commentaires de R. Dedekind à ≪Zahlen≫: La correspondance avec Keferstein. *Revue d'histoire des sciences*, 27(3):251-278, 1974.