Aus: Unendlichkeit : Interdisziplinäre Perspektiven. Hrsg. v. J. Brachtendorf / Thomas Möllenbeck / Gregor Nickel / Stephan Schaede. Tübingen: Mohr Siebeck 2008, S. 233-248.

Christian Tapp

Unendlichkeit in Mengenlehre und Theologie

Über tatsächliche und scheinbare Beziehungen[1]

Das Unendliche war früher der Gegenstand metaphysischer und theologischer Spekulation. Heute wird es auf exakte Weise in der Mathematik erforscht. Stimmt dieses Bild? Um diese Frage einer Antwort näher zu bringen, setzt der vorliegende Aufsatz an bei den Beziehungen des Mathematikers Georg Cantor (1845–1918) zur Theologie. Cantor diskutierte mit einer Reihe von Theologen über Ausdifferenzierungen des Unendlichkeitsbegriffs, die in einem zweiten Abschnitt besprochen werden, und über Argumente für die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen, denen der dritte Abschnitt gewidmet ist. Der vierte und letzte Abschnitt bietet schließlich einige kritische Überlegungen zu der Frage, inwiefern behauptete Zusammenhänge zwischen Mathematik und Theologie wirklich bestehen können.

Der Text ist als ‚Spiegelvortrag' zu dem Beitrag von Ludwig Neidhart konzipiert worden und kann sich deshalb an einigen Stellen kürzer fassen, als es sonst angemessen wäre. Da sich Herr Neidhart für eine sehr enge Beziehung zwischen mathematischem und theologischem Unendlichkeitsdenken stark gemacht hat, kommt dem vorliegenden Text der kritischere und vorsichtigere Part zu. Die Vorsicht gegenüber zu schnellen Brückenschlägen ist aber keineswegs gegen Interdisziplinarität gerichtet, sondern weiß sich im Gegenteil dem Streben nach echter interdisziplinärer Erkenntnis verpflichtet. Diese kann nur gelingen, wo bescheiden und genau geprüft wird, ob man sich wirklich verständigt und ob man über dasselbe Thema spricht. Würde man diese Frage in bezug auf das Unendliche vernachlässigen, so gäbe man sich wohl mit dem Schein des Gemeinsamen zu schnell zufrieden und verhinderte die wirkliche Überschreitung der oftmals so eng gezogenen fachlichen Grenzen.

[1] Eine frühere Version dieses Aufsatzes wurde unter dem Titel „Cantor, Mengenlehre und Theologie" auf der interdisziplinären Fachtagung „Unendlichkeit" am 02.12.2006 in Tübingen präsentiert.

In bezug auf den interdisziplinären ‚Grenzverkehr' sind die folgenden vier Abschnitte verschieden: Während es im ersten Abschnitt um Wissenschaftler geht, die zumindest im persönlichen Umgang die Grenzen ihrer Fachdisziplinen faktisch überschritten haben, werden im zweiten Abschnitt einige begriffliche Weichenstellungen vorgenommen. Der dritte Abschnitt behandelt Argumente, die mathematische, philosophische und theologische Fragestellungen verbinden, bevor dann der vierte Abschnitt versucht, einige Grenzen dieser Disziplinüberschreitungen aufzuzeigen.

I. Georg Cantor und die Theologie

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts überschritt Georg Cantor, einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit, die Grenzen seiner fachlichen *community* und trat in Kontakt mit einer Reihe von Theologen.[2] Spuren davon findet man in Cantors mathematischen und philosophischen Schriften, unter anderem in Form von vielen Anmerkungen und Literaturhinweisen zu philosophisch-theologischen Werken.[3] Diese Kontaktaufnahme ist nicht nur für die heutige Zeit ungewöhnlich, sie war es auch zu Cantors Zeit und das ganz besonders vor dem Hintergrund des Cantor-Bildes, das seine Standardbiographien vermitteln.[4]

Cantor war der Sohn eines dänischen Protestanten und einer russischen Katholikin. Der väterliche Einfluß bestimmte die religiöse Erziehung. Cantor wurde evangelisch getauft und erzogen. Er studierte und lehrte später im ‚erz-protestantischen' Teil Deutschlands, nämlich in Berlin und Halle-Wittenberg. Die Bedeutung der väterlichen Glaubenserziehung nahm nach und nach ab und Cantor distanzierte sich mehr und mehr von den christlichen Kirchen. Er sei zu einem religiösen Opportunisten geworden, heißt es, der seine Position in Abhängigkeit von der seines Gegenübers zweckrational modifizierte und erscheint als ‚preußischer Durchschnittsprotestant'. Religion gehört in den privaten Innenbereich oder wird gar unter dieselbe

---

[2] Cantors Kontakte zu Theologen und die zugehörige Korrespondenz sind aufgearbeitet in: *C. Tapp*, Kardinalität und Kardinäle. Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit (=Boethius), Bd. 53, Stuttgart 2005. Darin ist auch der erhaltene Teil des Briefwechsels kritisch ediert.

[3] Die wichtigsten Arbeiten Cantors sind publiziert in: *G. Cantor*, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin 1932, Hildesheim [2]1962.

[4] Zum Standard der Cantor-Biographien gehören: *J. W. Dauben*, Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Cambridge 1979, Princeton [2]1990 (bes. im englischen Sprachraum), *W. Purkert/H. J. Ilgauds*, Georg Cantor 1845–1918, Basel 1987 (bes. im deutschen Sprachraum) sowie *I. Grattan-Guinness*, Towards a Biography of Georg Cantor, in: Annals of Science 27 (1971), S. 345–392d. Die folgenden kritischen Bemerkungen beziehen sich vor allem auf die beiden letztgenannten Arbeiten.

Überschrift gestellt wie Cantors fixe Ideen zur Identität von Bacon und Shakespeare. Als ‚verrückt' werden gelegentlich auch die metaphysisch-theologischen Anwandlungen des großen Mathematikers pauschal abgeurteilt und damit für erledigt erklärt.

Dieses Bild kann man aus zwei Gründen anzweifeln. So wird man *erstens* den bisherigen Darstellungen vorhalten müssen, die Themen Religion, Theologie und Metaphysik unangemessen behandelt zu haben, wenn sie sie in das Reich des Privaten lockten, nur um sie dort mit der Keule der psychischen Erkrankung Cantors zu erschlagen. Denn so bleibt völlig im Dunkeln, warum ausgerechnet bei diesem hochkarätigen Mathematiker plötzlich von Theologen und Theologie zu lesen ist. Und *zweitens* kann dieses Bild nicht erklären, warum ein protestantischer Mathematiker an einer protestantischen Universität mitten im Kulturkampf des 19. Jahrhunderts intensive Beziehungen zum Katholizismus aufgenommen hat. Wer zuviel mit bloßen Verirrungen eines anderen erklärt, dessen Erklärungen werden selbst zweifelhaft.

Die systematische Erforschung der cantorschen Kontakte mit Theologen hat hier ein differenzierteres Bild möglich gemacht. Heute sind 95 Korrespondenzstücke bekannt, die meisten davon Briefe *von* Cantor *an* Theologen, da die Briefe in die andere Richtung wohl das dunkle Schicksal von Cantors Nachlaß teilen. Unter Cantors Korrespondenzpartnern waren insgesamt 30 Theologen und davon waren immerhin 26 katholisch: 12 Jesuiten, 9 Weltpriester, 3 Dominikaner und 2 Franziskaner. Schon diese Zahlen allein lassen Zweifel aufkommen an der Geschichte vom preußischen Durchschnittsprotestanten, dem Religion eine Art privater Nebensache war.

Aus der Auswertung dieser Kontakte ergeben sich eine Reihe von Detailinformationen zu Cantors Persönlichkeit und seiner Biographie: Er hat Pseudonyme verwendet (teilweise sogar in religionspolemischen Zusammenhängen); seine religiöse Abstammung war von väterlicher Seite her definitiv jüdisch – manche Forscher haben dies bestritten, ohne verläßliche Belege zu haben –;[5] eine Großtante, die zur griechisch-katholischen Kirche konvertiert war, hat den jungen Georg häufig zu Gottesdiensten im byzantinischen Ritus mitgenommen; und als besondere Herausforderung schließlich Cantors Äußerung, daß er sich vorstellen könne, unter anderen Umständen womöglich Priester oder gar Jesuit geworden zu sein. Mit Opportunismus wird man das nur dann erklären können, wenn man Cantors intellektuelle Integrität preisgibt, und dazu sollte man sich wohl nur versteigen, wenn sich keine anderen Auswege mehr bieten. Sicher litt Cantor ganz erheblich unter psychischen Problemen. Aber was richtet diese, auf die Per-

[5] So etwa *I. Grattan-Guinnes*, Biography, a.a.O., S. 351.

son bezogene Feststellung eigentlich gegenüber dem inhaltlichen Anspruch seiner Werke aus?[6]

Cantor hat sich intensiv mit Fragen der philosophischen Grundlegung der Mengenlehre befaßt. Mit den Theologen diskutierte er eine Reihe von angeblichen ‚Beweisen' für die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen, um sie zu widerlegen und die Denkmöglichkeit dieser Objekte zu verteidigen. Dies setzte eine Reihe von Differenzierungen des Unendlichkeitsbegriffs voraus.

II. Differenzierungen des Unendlichkeitsbegriffs

In den Auseinandersetzungen mit seinen theologischen Zeitgenossen nimmt Cantor die grundlegende Unterscheidung des Aristoteles zwischen einem aktual und einem potentiell Unendlichen auf, daneben aber auch die in der scholastischen Logik entwickelte Unterscheidung von einer kategorematischen und einer synkategorematischen Prädizierung von ‚unendlich'. Das potentiell Unendliche in der Mathematik kritisiert er als eine in Wahrheit endliche Größe, für die man nur keine Schranke kennt. Das aktual Unendliche hingegen differenziert er mit einer Reihe spät- und neuscholastischer Philosophen weiter in ein *infinitum in concreto*, ein *infinitum in abstracto* und ein *infinitum in Deo*. Um zwischen Unendlichem und Absolut-Unendlichem zu unterscheiden, nennt Cantor dasjenige Unendliche, was nicht absolut unendlich, sondern noch vermehrbar ist, „Transfinitum" und das Zentrum seiner Theorie daher auch „Lehre von den *transfiniten* Ordinal- und Kardinalzahlen".

Die Unterscheidung zwischen dem aktual und dem potentiell Unendlichen ist bis heute ein vitaler Topos der Philosophie der Mathematik. Viele Ansätze zur Fundierung der Mathematik setzen auf den harmloser scheinenden ‚kleinen Bruder' des aktual Unendlichen, offenbar um sich von metaphysischem Anschein freizuhalten. In der Mathematik selbst ist die traditionelle Verwendung des Begriffs des potentiell Unendlichen mit der Reform der Analysis Mitte des 19. Jahrhunderts obsolet geworden. Der ungleich präzisere Grenzwertbegriff trat an die Stelle von Redeweisen wie der, daß eine Größe „potentiell unendlich klein" oder daß der Wert einer Funktion „potentiell unendlich groß" wird. Damit hatte man Ausdrücke verabschiedet, mit denen man sich wegen ihrer mangelnden Klarheit leicht in Widersprüche verwickelt hatte. Eine Zahl a heißt der Grenzwert einer Folge von

[6] Cantors psychische Erkrankung ist Gegenstand der detaillierten Studie: *N. Charraud*, Infini et Inconscient. Essai sur Georg Cantor, Paris 1994. Die darin behaupteten Zusammenhänge mit den Inhalten von Cantors wissenschaftlicher Arbeit sind jedoch abenteuerlich.

Werten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ genau dann, wenn es zu jeder vorgegebenen Genauigkeit $\varepsilon>0$ eine Stelle i gibt, so daß alle Folgenglieder, die nach a_i kommen, sich nur noch um höchstens ε von a unterscheiden. Kurz: Eine Zahl ist der Grenzwert einer Folge, wenn die Folge sich dieser Zahl beliebig annähert. Mit einer bestimmten Größe, die betragsmäßig unendlich klein, aber dennoch nicht Null sei, brauchte man in der Analysis dann nicht mehr zu operieren. Man sollte allerdings nicht verschweigen, daß es seit den 1960er Jahren eine formallogisch einwandfreie Theorie gibt, die sogenannte „Nichtstandardanalysis", die konsistenterweise mit ‚unendlichkleinen' Größen operiert. Dies ist aber kein Argument gegen den eben vorgetragenen Gedanken, denn dieser hängt ja nicht an der Unmöglichkeit einer Nichtstandardanalysis, sondern nur daran, daß es nicht notwendig ist, unendlich kleine Größen zu verwenden.

Cantor ging es nun nicht darum, genau diesen, gerade mühsam über Bord geworfenen Begriff des ‚potentiell unendlich Kleinen' zurück ins Boot zu holen, sondern um eine Theorie aktualer Unendlichkeit. Das muß nicht heißen, daß seine Mengen in der Wirklichkeit der Einzeldinge oder in einem platonischen Reich auch wirklich existieren müssen. Es geht nur darum, daß Mengen gewissermaßen etwas ‚feststehendes' und extensional Bestimmtes sind. Sie *werden* nicht unendlich, sondern sind es oder sind es nicht. *Tertium non datur.*

Es gibt ein metaphorisch verkleidetes Argument, das Cantor im Gedankenaustausch mit Constantin Gutberlet, dem Fuldaer Theologieprofessor, entwickelt hat. Es läßt sich auf folgenden Punkt bringen: Um auf einem Weg potentiell immer weiter voranschreiten zu können, muß der Weg schon eine aktuale Ausdehnung haben, die dieses Voranschreiten zuläßt. Für Cantor und Gutberlet war damit klar, daß jedes potentiell Unendliche ein aktual Unendliches voraussetzt.[7] In welchem Sinne hier allerdings von „voraussetzen" die Rede ist, läßt sich nicht so leicht klären. Die Stoßrichtung des Arguments deckt sich jedenfalls mit Problemen, auf die man bei der logischen Rekonstruktion des Begriffs ‚potentiell unendlich' stößt. Jede präzise Fassung dieses Begriffs scheint entweder endlich erfüllbar zu sein oder mit dem aktual Unendlichen zusammenzufallen.

---

[7] Vgl. *C. Gutberlet*, Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, Mainz 1878, S. 11ff.; *G. Cantor*, Gesamelte Abhandlungen, a.a.O., S. 404, 410f. u.ö.

III. Argumente gegen die Existenz aktual unendlicher Zahlen

Die Tradition kennt eine Reihe von Argumenten gegen die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen. Mit ihnen muß sich jeder auseinandersetzen, der eine mathematische Theorie unendlicher Zahlen entwickelt und zugleich, wie Cantor, ein Gegner des wissenschaftlichen Partikularismus' ist. Diese Argumente waren aber auch theologisch äußerst relevant, ja im Mittelalter geradezu von Brisanz gewesen. Dies lag an der virulent gewordenen Frage, ob der Weltanfang vor endlicher Zeit aus anderen philosophisch-theologischen Annahmen folgt oder selbst ein Glaubenssatz ist. Diese Frage war im 13. Jahrhundert besonders deswegen brisant, weil sie die Rezeption des vollständigen Aristoteles betraf. War seine Lehre von der Ewigkeit der Welt mit dem Christentum vereinbar oder nicht? Widersprach der Aristotelismus den Prinzipien des christlichen Schöpfungsglaubens? – An dieser Frage schieden sich die dominikanische und die franziskanische Schultheologie und an dieser Frage entschied sich, inwieweit eine christliche Aristotelesrezeption möglich war.

Dabei spielte die Möglichkeit aktual unendlicher Mengen eine wichtige Rolle, wenn man fragte, ob die Zeit in die Vergangenheit unendlich ausgedehnt sei. Man argumentierte zum Beispiel folgendermaßen: Wenn es *keinen* Weltanfang vor endlicher Zeit gegeben hat, so hat es bisher unendlich viele gleiche Zeitintervalle oder unendlich viele Lebewesen oder unendlich viele Generationen von Lebewesen oder Ähnliches gegeben, jedenfalls aktual unendliche Mengen von etwas. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß sich jede Menge als bestimmte Menge auch zählen lassen müsse, folgte dann, daß es unendliche Zahlen geben müßte. Gibt es sie aber nicht, so ist durch dieses Argument die Annahme, es hätte keinen Weltanfang vor endlicher Zeit gegeben, *ad absurdum* geführt.

Es lohnt sich, mit Cantor einen Blick auf diese Argumente zu werfen. Zur Orientierung unterscheide ich Argumente, für die die Unbestimmtheit des Unendlichen zentral ist, von Argumenten, die bestimmte Annahmen über unendliche Zahlen zum Widerspruch führen. Ich beginne mit letzteren.

1. Argumente aus bestimmten Annahmen über unendliche Zahlen

Die prominentesten Axiome, die in Beweisen für die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen verwendet wurden, gehen auf Euklid von Alexandria zurück, den wohl bedeutendsten Mathematiker der Antike. Seine *Elementa* waren zwei Jahrtausende lang das Standardlehrbuch der Geometrie. Zwei

Axiome aus diesem Geometriebuch machten sich nach und nach selbständig und sind wohl bis heute fast jedem bekannt:

1. Das Ganze ist größer als sein Teil.
2. Was einander deckt, ist einander gleich.

Herausgelöst aus ihrem geometrischen Kontext wurden diese beiden Axiome zum Kern einer Reihe von Argumenten, die die Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen zeigen wollten.

Nach einer naheliegenden Interpretation dieser Axiome dürften schon die einfachsten Beispiele unendlicher Mengen gar nicht möglich sein: Die natürlichen Zahlen und die geraden Zahlen ‚decken sich', sie müßten also nach Axiom 2. einander gleich sein. Und doch bilden die geraden Zahlen nur einen Teil der natürlichen Zahlen, weswegen die natürlichen Zahlen nach 1. größer sein müßten – Widerspruch.

Dieser Widerspruch läßt sich auflösen durch die Unterscheidung zweier Größenbegriffe, die im Unendlichen nicht mehr zusammenfallen. Für Euklids endliche Geometrie hatte keine Notwendigkeit bestanden, zwischen diesen Begriffen zu unterscheiden. Ludwig Neidhart hat sie als „relationstheoretisch" und „ergänzungstheoretisch" bezeichnet.[8] Der Widerspruch läßt sich dann so auflösen, daß aktual unendliche Mengen von Zahlen sich decken können in dem Sinne, daß es eine bijektive Abbildung zwischen Mengen und echten Teilmengen gibt. Von ihnen kann Satz 2. nur in dem Sinne gelten, daß sie *‚relationstheoretisch gleich groß'* sind. *Ergänzungstheoretisch* betrachtet sind diese Mengen natürlich nicht gleich groß wie ihre echten Teilmengen, sondern im Sinne von Satz 1. *größer* als diese. Anders gesagt: Heißt „decken" in Satz 2. soviel wie, daß es eine bijektive (eineindeutige) Abbildung gibt, so folgt daraus das größenmäßige ‚Gleich'-sein nur im Sinne der Kardinalität. In bezug auf die Kardinalität ist aber (Satz 1.) eine ‚ganze' Menge nicht notwendig größer als ihre ‚Teil'-Menge, sondern nur in bezug auf die Teilmengenrelation $\subset$. Mit der Aufhebung dieses vermeintlichen Widerspruchs fallen auch die Argumente gegen aktual unendliche Zahlen weg, die mit Hilfe der euklidischen Axiome geführt werden.

Ein anderes Beispiel für eine Argumentation, die von bestimmten Annahmen über aktual unendliche Zahlen ausgeht, findet man im Werk des neuscholastischen Jesuiten-Theologen Tilmann Pesch. In seinen *Institutiones philosophiae naturalis* (1880) vertrat er ein über eine längere Textpassage ausgedehntes Argument mit vielen Zwischenschritten, die hier nicht im einzelnen diskutiert werden sollen. Wichtig ist die Beobachtung, daß Pesch

[8] Vgl. den Beitrag von *L. Neidhart* in diesem Band; auch *C. Tapp*, Kardinalität und Kardinäle, a.a.O., S. 48–50.

zwei Definitionen oder charakterisierende Sätze über das Unendliche verwendet, nämlich:

1. Unendlich wird jenes genannt, von dem immer etwas außerhalb ist.
2. Unendlich ist jenes, dem gegenüber nichts größer wäre, noch sein könnte.[9]

Ausgehend von diesen beiden Aussagen führt Pesch dann die Annahme aktual unendlicher Mengen oder Zahlen auf einen Widerspruch.

Cantor diagnostiziert als Schwachpunkt an Peschs Argumentation, daß hier *zwei* Aussagen über das Unendliche benutzt werden, ohne zu zeigen, daß sie übereinstimmen oder auch nur miteinander verträglich sind. Solange dies aber nicht gesichert ist, ist nicht klar, ob der Widerspruch sich nicht letztlich nur aufgrund ihrer Unvereinbarkeit ergibt. Denn in der zweiten Definition wird das Unendliche ja als etwas definiert, zu dem es nichts Größeres gibt. Insbesondere gibt es also nichts außerhalb, was man dem Unendlichen hinzufügen könnte, denn dann würde man ja ein noch größeres Unendliches erhalten. Während Definition 2. also fordert, daß es nichts außerhalb gibt, verlangt Definition 1. gerade, daß man bei einem Unendlichen immer noch etwas außerhalb fände. Man müßte hier natürlich begrifflich noch genauer argumentieren, aber schon dieser Gedankengang begründet zumindest einen ‚Anfangsverdacht', daß die beiden Definitionen *nicht* miteinander verträglich sind.

Interessanterweise weist Pesch in seinen *Institutiones* eine dritte Unendlichkeitskonzeption zurück, die er den „alten Philosophen" zuschreibt. Sie hätten unter dem Unendlichen dasjenige verstanden, von dem nichts außerhalb seiner selbst ist („*id, cuius nihil est extra*").[10] Pesch kritisiert diese Definition mit Aristoteles als inadäquat, denn sie definiere weniger das Unendliche als vielmehr das Ganze, denn das Ganze sei ja das, von dem nichts außerhalb seiner selbst ist.

In analoger Weise könnte man Peschs zweite Definition kritisieren, nach der etwas unendlich ist, „dem gegenüber nichts größer wäre, noch sein könnte". Dadurch wird ja eher ein Maximum als ein Unendliches definiert, denn das Maximum ist ja dasjenige, gegenüber dem nichts größer wäre. Für eine allgemeine Definition des Unendlichen ist das viel zu eng, denn danach wäre nicht einmal die Menge der natürlichen Zahlen unendlich.

---

[9] Vgl. *T. Pesch*, Institutiones Philosophiae Naturalis, Bd. 2, Freiburg 1880, [2]1897, S. 88–89. 1.„Infinitum illud dicitur, cujus aliquid semper est extra." 2.„Infinitum est illud, quo non sit majus, nec esse possit."

[10] Vgl. *ders.*, Institutiones, a.a.O., S. 88.

2. Argumente mit der Unbestimmtheit des Unendlichen

Schon Aristoteles hielt aktual unendliche Zahlen für unmöglich. Seine Argumente dafür hängen mit seiner engen Verbindung von Metaphysik und Erkenntnistheorie zusammen. Der aristotelische Zahlbegriff ist der eines *pläthos peperasmenon*, einer umgrenzten Menge. Versteht man unter *peperasmenon* das Ende-Haben, also das Endlichsein, so schließt dieser Begriff von Zahl schon die Endlichkeit mit ein. Der aristotelische Zahlbegriff hätte vielleicht für die Möglichkeit unendlicher Zahlen geöffnet werden können, wenn man unter dem Umgrenzten, dem *peperasmenon*, nicht schlechthin das Endliche, sondern das Bestimmte verstanden hätte.

Die enge Beziehung zwischen Endlichkeit und Bestimmtheit bzw. Unendlichkeit und Unbestimmtheit ist besonders bei Thomas von Aquin bestimmend geworden. In der *Quaestio* 7, Artikel 4 des ersten Teils der *Summa Theologiae*, hat Thomas gegen die Möglichkeit aktual unendlicher Mengen wirklicher Gegenstände argumentiert und zwar explizit auch gegen Mengen, die bloß akzidentell aktual unendlich groß sind. Als *sed contra* gegen die Existenz eines geschaffenen aktual Unendlichen zitiert Thomas darin die bekannte Stelle aus dem Buch der Weisheit 11,20, wo es heißt: „Du aber hast alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet."

Diese Stelle wurde gelegentlich als Baustein für ein Argument hergenommen, daß es in der *natura creata*, in der geschaffenen Welt, kein aktual Unendliches geben könne. Bevor Thomas' Argumentation näher besprochen wird, sei im Folgenden kurz etwas zu diesen Argumenten gesagt. Cantor stellte fest, daß sie zirkulär sind, wenn sie aus der genannten Bibelstelle ableiten, daß es kein aktual Unendliches in der Welt und *daher* auch keine aktual unendlichen Zahlen geben könne. Denn warum sollte aus dem Weisheits-Zitat folgen, daß es kein aktual Unendliches in der Schöpfung gibt? Dazu müßte dessen Unendlichkeit dem Messen, Zählen und Wägen widersprechen. Das heißt aber, daß das Argument davon abhängt, daß Messen, Zählen und Wägen nur mit endlichen Zahlen funktionieren können und somit letztlich davon, daß Zahlen per se endlich sind. Das mag nach dem aristotelischen Zahlbegriff plausibel sein, das Argument jedoch setzt damit voraus, was es zeigen will, und ist zirkulär.

Cantor hat dagegen mit Hilfe dieser Bibelstelle auf eine Beziehung zwischen seiner Mengenlehre und der Theologie hinweisen wollen. Der Satz, Gott habe alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet, macht ja eine Aussage über die Ordnung der Welt und führt diese Ordnung auf Gott zurück. Nun macht Cantor geltend, daß er mit seiner Theorie transfiniter Zahlen den Bereich dessen, was von uns als geordnet wahrgenommen werden kann, massiv erweitert, und damit auch das, was diese Weisheitsaussage über Gottes ordnende Schöpfermacht behauptet. Eine erweiterte Mathematik erweitert so die Möglichkeiten der Metaphysik und der Schöpfungserkenntnis und kann auf diesem Weg ein Scherflein zu einer erweiterten Gotteserkenntnis beitragen.

Von den zwei Argumenten des Thomas gegen aktual unendliche Mengen sei hier exemplarisch nur das erste herausgegriffen. Es läßt sich wie folgt paraphrasieren:

1. Jede Menge muß einer ganz bestimmten Art von Mengen angehören. (Erste Voraussetzung)
2. Arten von Mengen werden nach den Arten von Zahlen bestimmt.[11] (Zweite Voraussetzung)
3. Zahlen werden durch die Einheit gemessen/bestimmt. (Dritte Voraussetzung)
4. Keine Art von Zahlen ist unendlich. (aus 3. (?))
5. Keine Art von Mengen ist unendlich. (aus 2. und 4.)
6. Ergo: Es gibt keine unendlichen Mengen. (aus 1. und 5.)

Der Grundgedanke ist hier ähnlich wie bei der eben zitierten Stelle aus dem Buch der Weisheit. Die Zahlen werden beidemal als Ordnungsprinzip verstanden, allerdings wird hier die Prämisse explizit gemacht, daß Zahlen nicht unendlich sein können, und zwar *weil* sie durch die Einheit gemessen oder bestimmt würden.

Diesen Fundamentalbestandteil des Zahlbegriffs hat auch Cantor nicht abgelehnt, auch er sieht Zahlen explizit als Mengen von Einheiten oder Einsen an. Die Frage an das Argumentationsschema des Thomas ist vielmehr, wie der Übergang von 3. zu 4. funktionieren, d.h. warum das Bestimmtsein oder Gemessenwerden mit Einheiten schon die Endlichkeit der Zahlen nach sich ziehen soll. Nach Cantor besteht hier wirklich ein Problem, solange nicht klar ist, wie Bestimmen und Messen mit unendlich großen Zahlen überhaupt vor sich gehen soll. Das Argument wird jedoch hinfällig, sobald es Individuations- und Anordnungsprinzipien für aktual unendliche Zahlen gibt. Beides wurde durch Cantors Theorie bereitgestellt. Sie zeigt, daß eine wohlbestimmte und konsistente Erweiterung des Zahlbegriffs ins Unendli-

[11] An Thomas' Argument kann man unmittelbar sehen, daß es wichtig ist, zwischen den transfiniten Zahlen und den mit diesen Zahlen ‚meßbaren' Mengen zu unterscheiden. (Thomas widmet dem Übergang einen eigenen Argumentationsschritt.) Dies berührt sich mit einer gewissen Doppeldeutigkeit des Ausdrucks „Mengenlehre". Einmal wird darunter nämlich ganz allgemein die Theorie der ‚Mengen' verstanden, die auf Bolzano, Dedekind und Cantor zurückgeht, später axiomatisiert wurde, in engster Beziehung zur Logik steht und heute die mathematische Universaltheorie ist. Dann aber versteht man unter Mengenlehre auch spezieller das, was nun wirklich ganz auf Cantors Konto geht: Nämlich die Theorie der transfiniten, unendlichen Ordinal- und Kardinalzahlen. Deren Theorie läßt sich zwar auch in den formalen Mengenlehren entwickeln, erlaubt aber auch eine eigene arithmetische Theorieentwicklung, wie etwa auch bei den reellen Zahlen. Beides sollte man unterscheiden.

che möglich ist und auf diese Weise auch ein ‚Messen' von unendlichen Mengen.

Spekuliert man darüber, warum Thomas diese Möglichkeit nicht gesehen hat, sollte man drei Dinge beachten: *Erstens* den vorherrschenden aristotelischen Zahlbegriff, der, wie gesagt, die Unendlichkeit schon begrifflich ausschloß. *Zweitens* könnte das ‚Messen' oder ‚Bestimmen' von Zahlen durch die Einheit in empirisch-psychologischer Richtung verengt aufgefaßt werden: Es ginge dann um unsere tatsächlichen Fähigkeiten, einzelne Zahlen mit der Eins ‚durchzumessen'. Dabei würden wir natürlich nie aktual unendliche Zahlen erreichen. Solche Positionen bringen allerdings eine Reihe von Problemen mit sich, beispielsweise können sie nicht erklären, wie wir große endliche Zahlen verwenden können, bei denen wir nie auf die Idee kämen, sie mit Einheiten tatsächlich durchzumessen. *Drittens* schließlich kann man Thomas nicht auf diese Position ‚festnageln', da er an anderer Stelle die Möglichkeit geschaffener aktualer Unendlichkeit durchaus zugelassen hat.

So sagt er zum Beispiel in seiner Schrift *De aeternitate mundi contra murmurantes*,[12] daß es bislang nicht bewiesen sei, daß Gott nicht unendlich Vieles machen konnte: „*Et praeterea non est adhuc demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu.*" Die genaue Bedeutung dieser Stelle hängt von der Deutung des Neutrums Plural *infinita* ab. Es könnte sich um den abstrakten Neutrum Plural handeln, der häufig für nicht näher Bestimmtes steht und hier am besten mit „Unendliches" wiederzugeben wäre. Es könnte natürlich auch ein wirklicher Plural sein, der eine Anzahl meint, im Sinne von „unendlich viele". Cantor faßte die Stelle jedenfalls im letzteren Sinne auf und berief Thomas zum Kronzeugen dafür, daß von einer nachgewiesenen Unmöglichkeit aktual unendlicher Zahlen keine Rede sein könne, auch wenn Thomas sich in der *Summa* gegen sie ausgesprochen hatte.[13]

Thomas hielt also aktual unendliche Zahlen nicht für möglich – wenn auch, wie gesehen, aus unzureichenden Gründen. Dennoch sah er die Unmöglichkeit der Erschaffung von etwas Unendlichem durch Gott nicht als bewiesen an. Dies entspricht auch seiner grundsätzlichen Haltung in der

---

[12] Für die Authentizität dieser Schrift, die gelegentlich bezweifelt wird, spricht vor allem, daß die Entstehungsumstände relativ gut dokumentiert sind: Es war eine polemische Antwort auf die Inaugural-Vorlesung des John Pecham im Frühjahr 1270 in Paris. Vgl. *J. Weisheipl*, Friar Thomas d'Aquino. His Life, Thought, and Works, Oxford 1974, S. 286–288 und S. 385, Nr. 56 (dt. Übersetzung: *ders.*, Thomas von Aquin. Sein Leben und seine Theologie, Graz 1980, S. 253 u. S. 339, Nr. 56).

[13] So merkte Cantor gegenüber Alois Schmid an: „Man achte auf den bedeutsamen Plural, der im vorliegenden Zusammenhang vollends das hier gemeinte Unendliche als ‚transfinitum' charactersirt" (Brief Cantors an Schmid vom 26.03.1887, in: *C. Tapp*, Kardinalität und Kardinäle, a.a.O., S. 498–503).

Frage nach der Vereinbarkeit von christlichem Schöpfungsglauben und der aristotelischen Lehre von der Ewigkeit der Welt. Thomas muß als einer der ersten angesehen werden, die beides für miteinander vereinbar hielten. Mit Albertus Magnus hielt er die Ewigkeit der Welt nicht für eine zwingende Folgerung aus der aristotelischen Philosophie, sah sie aber auch nicht als einen Widerspruch zu den übrigen christlichen Glaubensgrundsätzen an. Der Satz über den Anfang der Welt vor endlicher Zeit war ihm ein echter Glaubenssatz („*sola fide tenetur*").

In Thomas' Argument wurde undiskutiert vorausgesetzt, daß die Messung unendlich großer Mengen durch die Eins nicht möglich sei. Der Unendlichkeitsbegriff erhält, wie bei Aristoteles, unbefragt die Konnotation der Unbestimmtheit. Dieser Punkt wurde noch einmal ganz deutlich bei Cantors Diskussion mit dem belgischen Jesuiten Ignace Carbonnelle, der pointiert schrieb, die unendliche Zahl sei zwar nicht absurd, aber wesentlich unbestimmt.[14] Carbonnelle vertrat gewissermaßen eine Mittelposition zwischen Cantor und Thomas: Er akzeptierte ein *transfinitum in abstracto*, aber kein *transfinitum in concreto*, d.h. für ihn gab es unendliche Zahlen, aber keine Mengen wirklicher Einzelgegenstände, die sich mit den transfiniten Zahlen auch zählen ließen. Er schreibt: „Die unendliche Zahl ist nicht absurd, aber sie ist wesentlich unbestimmt" („*Le nombre infini n'est pas absurde, mais il est essentiellement indéterminé*"). Cantor hat dieses Statement sehr wohlwollend interpretiert und zwar in dem Sinne, daß der Allgemeinbegriff der Zahl eben noch keine spezielle Zahl festlegt und insofern unbestimmt ist. Im selben Sinne könnte man seiner Ansicht nach dann auch sagen, daß die endliche Zahl wesentlich unbestimmt ist. Carbonnelle meinte aber wahrscheinlich eher wie Aristoteles und Thomas, daß Unendlichkeit im Sinne einer prinzipiellen Unbestimmtheit zu verstehen sei, so daß er der parallelen Aussage über endliche Zahlen wohl nicht zugestimmt hätte. Allerdings ist auch hier zu beklagen, daß die Antwort Carbonnelles auf Cantors Vorschlag nicht überliefert ist.

Die Frage, ob das Unendliche wesentlich unbestimmt ist, legt den Finger auf den wunden Punkt, denn wie verhält sich dazu die Realität einer stimmigen mathematischen Theorie über das Unendliche? Dies führt zu der Frage, welche Implikationen die Mengenlehre für die Metaphysik hat und haben kann.

---

[14] Vgl. a.a.O., S. 96ff., zu Cantors Diskussionen mit Ignace Carbonnelle.

IV. Mengenlehre und Theologie

Sicher gibt es Zusammenhänge zwischen Mathematik und Theologie. Die Frage ist aber, worin diese Zusammenhänge genau bestehen und welcher Art sie sind: Geht es um wortwörtlichen Transfer von Theoriestücken? Liefert die Mathematik Präzisierungen von Begriffen, die die Theologie benutzt? Oder ist sie eher ein Lieferant für Bilder, die der Theologie helfen, jenseits exakter Begriffe von ihren Mysterien zu reden? Und wo werden diese Funktionen schließlich überstrapaziert und Zusammenhänge gesehen, die in Wirklichkeit gar nicht bestehen?

In seinem Text hat sich Ludwig Neidhart für eine sehr enge Beziehung zwischen mathematischem und theologischem Unendlichkeitsdenken stark gemacht und Cantors Rede vom „unzerreißbaren Band“ zitiert, das Mengenlehre und Metaphysik verbinde. Meiner Ansicht nach muß man hier vorsichtig sein und die Zusammenhänge begrifflich sorgfältig prüfen. Die erwähnte Gefahr, daß interdisziplinäre Erkenntnis mißlingt und die vorschnelle Zusammenstellung verschiedener Dinge zu grotesken Bildern führt, ist ganz real. Als ein Negativbeispiel sei eine Karikatur erwähnt, die Cantor in der Pose eines Offenbarungsempfängers zeigt, der von oben Erleuchtung erhält und sie durch seine Hände auf das Papier leitet.[15] So werden Cantors metaphysisch-theologische Interessen und seine persönliche Religiosität dahingehend übersteigert, daß er die Mengenlehre als Privatoffenbarung erhalten habe. Damit kann weder der Mathematiker zufrieden sein, der die Mengenlehre als eine mathematische Theorie ansehen will, die auf dieselbe Weise gerechtfertigt wird wie andere mathematische Theorien, noch der Theologe, mit dessen Begriff der Offenbarung hier Schindluder getrieben wird. Wahrscheinlich hat Cantor als religiöser Mensch daran geglaubt, daß jede Erkenntnis, auch seine mathematische, letztlich auf Gott, auf ein Partizipieren an den Gedanken des Schöpfers zurückzuführen ist. Aber seine Theorie als direkte Gottesoffenbarung anzusehen, gerade im Gegensatz zu einer wissenschaftlichen Errungenschaft, ist etwas ganz anderes und eher dazu angetan, dem guten Ruf seiner wissenschaftlichen Theorie erheblich zu schaden. Auf ähnliche Weise mußte sich der ebenfalls berühmte Mathematiker David Hilbert aus dem Munde Paul Gordans die Schmähung anhören, sein Beweis des Invariantensatzes sei nicht Mathematik, sondern Theologie. Mathematiker und Theologen sollten sich darüber einig sein können, daß die Verwendung der Ausdrücke „Theologie“ und „Metaphysik“ als Schimpfwörter wenig hilfreich ist. Solche Arten polemischer Überzeichnung tun wirklichen Beziehungen zwischen Mathematik

[15] Diese Karikatur wurde abgedruckt in dem Aufsatz: *P. Thuillier*, Dieu, Cantor et l'infini, in: La Recherche 84 (1977), S. 1110–1116.

und Theologie keinen Gefallen, sondern provozieren bei Dritten bloß Ressentiments und bestätigen Vorurteile.

Um so drängender ist dann aber die Frage, wo wirkliche Zusammenhänge eigentlich bestehen können und wo nicht. Im Folgenden werden dazu einige erste Überlegungen präsentiert.

In der Mathematik antwortet der Unendlichkeitsbegriff auf die Frage „Wieviel?“ und gehört damit zur Kategorie der Quantität. Die Mathematik beschäftigt sich mit dem quantitativ Unendlichen. Sie unterscheidet etwa Abzählbar-Unendliches und Überabzählbar-Unendliches und hat durch Cantor eine ganze arithmetisch organisierte Strukturtheorie aktual unendlicher Zahlen. All dies verbleibt, philosophisch-metaphysisch gesehen, innerhalb der Kategorie der Quantität und kann als solches für metaphysische Argumente durchaus relevant sein. (Auf Auffassungen wie die, daß die Kategorien überhaupt nur das endliche Seiende betreffen, gehe ich hier nicht ein. Selbst wenn dies so wäre, könnte es zumindest noch unendlich viel endliches Seiendes geben und damit wäre das quantitativ Unendliche, zumindest von dieser Seite her, weiterhin für die Metaphysik relevant.)

Metaphysische Unendlichkeitsbegriffe scheinen mir hingegen viel basaler als jede Rede von Kategorien zu sein: Es geht schlechthin um Grenzen- oder Endlosigkeit. Man könnte nun das metaphysisch Unendliche mit dem Quantitativen in einen Zusammenhang bringen und sagen, daß metaphysisch Unendliches auch quantitativ unendlich sein muß, aber sicher nicht das Umgekehrte. Dann gäbe es hier tatsächlich eine Brücke, denn Cantors Theorie der unendlichen Zahlen verdankt sich genau der Beobachtung, daß das quantitativ Unendliche kein einheitlich-einfaches Phänomen ist, sondern daß es eine ganze Struktur mathematischer Unendlichkeit gibt. Man wird daher nicht ohne weiteres Unendlichkeit und Unbestimmtheit so eng zusammen denken können, wie es traditionell geschehen ist.

Die Bestimmung des Unendlichen als ein ‚Absolutes‘ hilft über diese prinzipiellen Schwierigkeiten nicht hinweg, denn auch hier muß man zwischen einer quantitativen und einer umfassenderen metaphysischen Bedeutung unterscheiden. Das ‚absolut Unendliche‘ im quantitativen Sinne wird durch den Umfang der „Unmengen“ (Neidhart) gut charakterisiert, aber auch so antwortet es noch auf die Frage nach dem Wieviel, eben daß es absolut unendlich viel oder über alle Maßen viel sei. Wenn hingegen das metaphysische „Absolute“ oder „absolut Unendliche“ verwendet wird, um Gott oder das göttliche Wesen zu bezeichnen, so geht es um Nicht-Relativität, Un-Eingeschränktheit und All-Umfassendheit schlechthin, nicht nur darum, daß es sich um absolut unendlich viel handelt. Um für den gemeinten Unterschied eine mathematische Analogie heranzuziehen: Von einem reellen Koordinatensystem wird man sicher sagen, daß die Menge der Zahlen, die die x-Achse bilden, unendlich ist. Und dennoch ist diese Achse schon in der reellen Zahlenebene nur ein geradezu verschwindender Teil – wie viel weniger noch ist eine ‚Unmenge', wie die der Ordinalzahlen, im Vergleich zum metaphysischen ‚Alles', das vom Absoluten umfaßt werden soll.

Ein letzter Punkt betrifft die angeblich enge Beziehung zwischen der Mengenlehre (oder der Mathematik überhaupt) und dem Platonismus. Im Gegensatz zu Ludwig Neidhart bin ich nicht der Ansicht, daß man Cantors Mengenlehre platonistisch interpretieren muß, jedenfalls wenn man unter „Platonismus" eine Ansicht versteht, nach der die mathematischen Begriffe eine vom Denken und empirischer Wirklichkeit unabhängige, eigenständige Existenz in einem „dritten Reich" (Frege) haben. Cantor lokalisiert mathematische Ideen zwar *in intellectu divino*, schließt sich damit aber eher einer aristotelisch-scholastischen Tradition an, die gerade nicht eine eigenständige Existenz der Ideen fordert. Hier wäre aber noch viel Differenzierteres zu Cantors Ansichten über Mengen zu sagen, und nach einem völlig befriedigenden Begriff von ‚Platonismus' ist auch noch zu suchen.

V. Zusammenfassung

Mathematik und Theologie reden nicht über dasselbe Thema, wenn sie von Unendlichkeit sprechen: Theologie und Metaphysik benutzen Unendlichkeit in einem umfassenden Sinne, während in der Mathematik nur die quantitative Seite thematisiert wird. Innerhalb der dadurch gesetzten Grenzen gibt es wechselseitige Implikationen zum Beispiel dann, wenn man aufgrund der Mengenlehre den metaphysischen Schluß zieht, daß das Unendliche nicht mehr einfach als das Unbestimmte angesehen werden kann. Dies ist eine Weise, wie mathematische Erkenntnisse für theologische Fragen, wie die nach der Beweisbarkeit eines zeitlichen Weltanfangs, relevant werden. Die philosophische Diskussion des Unendlichkeitsbegriffs war und ist insofern das Medium, durch das theologische Diskussionen und Grundlagenfragen der Mathematik aufeinander einwirken können. Auf diesem Themenfeld konnten sich der Mathematiker Cantor und seine theologischen Zeitgenossen fruchtbar begegnen.

Literaturhinweise

Primärliteratur

Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin 1932, Hildesheim ²1962.

Sekundärliteratur

Charraud, Nathalie: Infini et Inconscient. Essai sur Georg Cantor, Paris 1994.

Dauben, Joseph Warren: Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Cambridge 1979, Princeton ²1990.

Grattan-Guinness, Ivor: Towards a Biography of Georg Cantor, in: Annals of Science 27 (1971), S. 345–392d.

Gutberlet, Constantin: Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, Mainz 1878.

Pesch, Tilmann: Institutiones Philosophiae Naturalis, Bd. 2, Freiburg 1880, ²1897.

Purkert, Walter/Ilgauds, Hans Joachim: Georg Cantor 1845–1918, Basel 1987.

Tapp, Christian: Kardinalität und Kardinäle. Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit (= Boethius, Bd. 53), Stuttgart 2005.

Thuillier, Pierre: Dieu, Cantor et l'infini, in: La Recherche 84 (1977), S. 1110–1116.

Weisheipl, James A.: Friar Thomas d'Aquino. His Life, Thought, and Works, Oxford 1974. (Dt. Übersetzung: *ders.*, Thomas von Aquin. Sein Leben und seine Theologie, Graz 1980.)

Sonderdruck aus:

Unendlichkeit

Interdisziplinäre Perspektiven

Herausgegeben von

Johannes Brachtendorf, Thomas Möllenbeck,
Gregor Nickel und Stephan Schaede

Mohr Siebeck 2008

Dieser Sonderdruck ist im Buchhandel nicht erhältlich.

Inhalt